

**Differenzierbare Strukturen
auf
Orbiträumen**

Helmut Kastenholz
Diplomarbeit

Bonn, April 1999

Kurzfassung

Gegeben sei eine differenzierbare Operation einer kompakten Liegruppe H auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Das grobe Scheibendiagramm der Operation heie Δ . M und Δ seien stillschweigend mit Tubensystemen ausgestattet.

Existiert eine Linearisierung von Δ , so bestimmt sie eine differenzierbare Struktur auf dem Orbitraum $H \backslash M$. Fur kompaktes M fuhren isotope Linearisierungen zu isotopen differenzierbaren Strukturen. Bei abelschem Scheibendiagramm, insbesondere bei abelschem H sind die Aussagen „ $H \backslash M$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit“, „Auf $H \backslash M$ existiert eine differenzierbare Struktur“ und „ Δ ist linearisierbar“ sogar äquivalent.

Zwei Beispiele werden geometrisch untersucht: $\mathbb{C}P^2$, geteilt durch die komplexe Konjugation, ist diffeomorph zu S^4 . $SU(3)$, geteilt durch $T_{\max} \times T_{\max}$, ist homöomorph zu S^4 . Allgemeiner ist fur eine kompakte Liegruppe K der Orbitraum $T_{\max} \backslash K / T_{\max}$ genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn K fur geeignete $k, l, m \geq 0$ lokal isomorph zu $U(1)^k \times SU(2)^l \times SU(3)^m$ ist.

Mathematics Subject Classification (1991):

57S15 Compact Lie groups of differentiable transformations

Inhalt

Inhalt	3
Einleitung	6

Kapitel I Differenzierbare Strukturen auf Orbiträumen

§ 1 Äquivariante Mannigfaltigkeiten	14
Topologische Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Strukturen; Operationen auf Mannigfaltigkeiten; Homogene Operationen; Äquivariante Mannigfaltigkeiten	
§ 2 Äquivariante Vektorräume	20
Äquivalenzen von Darstellungen; Äquivariante Vektorräume; Scheibentypen beliebiger linearer Darstellungen; Scheibendiagramme; Stratifizierungen	
§ 3 Äquivariante Vektorbündel	30
Reduktion der Strukturgruppe bei äquivarianten Prinzipalbündeln; Äquivariante Vektorbündel; Beziehung zu äquivarianten Vektorräumen; Beziehung zu äquivarianten Mannigfaltigkeiten	
§ 4 Tubensysteme	37
Tubenumgebungen; Tubensysteme; Existenz von Tubensystemen	
§ 5 Quotienten äquivarianter Vektorräume	47
Quotientenstrukturen; Erste Eigenschaften; Linearisierungen der Länge 2	
§ 6 Quotienten äquivarianter Vektorbündel	54
Quotienten äquivarianter Prinzipalbündel; Quotienten äquivarianter Vektorbündel	
§ 7 Quotienten äquivarianter Mannigfaltigkeiten	59
Abstrakte Stratifizierungen; Die differenzierbare Struktur auf dem Orbitraum; Zusammenfassung und Kritik	

§ 8 Isotopien	72
Allgemeines; Isotopien von Tubensystemen; Isotopien von Quotienten; Isotopien von Quotientenstrukturen	
§ 9 Produkte	85
Produkte von Objekten; Produkte von Tubensystemen; Produkte von Quotientenstrukturen	
Anhang A Primfaktorzerlegung von Darstellungen	89
Partitionen; Faktorisierungen; Exkurs: Kurze exakte Sequenzen; Darstellungen; Grobe Scheibentypen	
Anhang B Faserbündel	95
Faserbündel; Prinzipalbündel; Die Korrespondenz zwischen Prinzipalbündeln und Faserbündeln; Geschachtelte Bündel	
Anhang C Reduktion der Strukturgruppe	99
Konjugiertheit; Reduktionssätze	

Kapitel II Besonderheiten des abelschen Falles

§ 1 Die topologische Variante	105
Der Satz von Böhm; Darstellungen der Kodimensionen 0 und 1; Umformulierung	
§ 2 Ecken	111
Ecken; Scharen von Ecken; Ecken im weiteren Sinne; Morphismen; Eckenscharen im weiteren Sinne; Modellobjekte und -morphismen	
§ 3 Tubensysteme von Ecken	122
Tubensysteme; Auswahlen; Existenz	
§ 4 Glättungen von Ecken	130
Glättungen; Glättungsfolgen; Existenz	
§ 5 Die differenzierbare Variante	136
Das universelle abelsche Scheibendiagramm Δ^{ab} ; Ein Tubensystem von Δ^{ab} ; Eine Linearisierung der Sd-Matrix ($\Delta^{ab} \chi$)	

Kapitel III Die Diffeomorphie von $\mathbb{C}P^2/(\bar{})$ zu S^4

§ 1 Die komplex projektive Ebene 146
 Das Ellipsenmodell; Riemannsche Metrik; Die $O(V)$ -Operation

§ 2 Die Diffeomorphie von $\mathbb{C}P^2/(\bar{})$ zu S^4 151
 Äquivariante Einbettungen großmannscher Mannigfaltigkeiten; Die Veroneseabbildung; Die Einbettung von $\mathbb{C}P^2/(\bar{})$; Differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{C}P^2/(\bar{})$

§ 3 Die Homöomorphie von $SP^2(\mathbb{C}P^1)$ zu $\mathbb{C}P^2$ 160
 Die D_4 -Operation auf $S^2 \times S^2$; Symmetrische Potenzen; Die Quaternionen; Die Hopfabildung; $S^2 \times S^2$ als Graßmannsche; Interpretationen von $S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$; Vereinheitlichung

Kapitel IV Die Homöomorphie von $T \backslash \mathbf{SU}(3)/T$ zu S^4

§ 1 $T \backslash G/T$ im allgemeinen 173
 Der reelle Fall; Der komplexe Fall; Der modulare Fall

§ 2 Die Diffeomorphie von $Q \backslash \mathbf{SO}(3)/Q$ zu S^3 175
 Beidseitige Operationen von Untergruppen; Triangulierung; Differenzierbarkeit

§ 3 Die Homöomorphie von $T \backslash \mathbf{SU}(3)/T$ zu S^4 186
 Lokale Situation; Bruhatzerlegung; Die Abbildung i ; Topologische Gestalt der Quotienten; Einbettung der Quotienten; Differenzierbarkeit

Literatur 202

Stichwörter 205

Symbole 210

Zeichnungen 215

Einleitung

M heißt eine differenzierbare H -Mannigfaltigkeit, wenn eine differenzierbare Operation der kompakten Liegruppe H auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gegeben ist.¹ Während die einzige lokale Information einer Mannigfaltigkeit die Dimension ist, kann jedem Punkt einer H -Mannigfaltigkeit seine Scheibendarstellung zugeordnet werden. Global kann M einerseits anhand der Scheibentypen stratifiziert werden, andererseits läßt sich M durch H teilen. Die Frage liegt nahe, welche Strukturen der Quotient trägt oder tragen kann.

Die Garbe der invarianten differenzierbaren Funktionen der H -Mannigfaltigkeit induziert eine Garbe auf dem Quotienten. Außerdem erbt dieser die Stratifizierung² und ist damit triangulierbar.³ Er ist sogar eine (berandete) topologische Mannigfaltigkeit nach Herausnahme einer geeigneten abgeschlossenen Menge der Kodimension mindestens drei.⁴ Ob der gesamte Quotient eine topologische Mannigfaltigkeit ist, ist eine lokale Frage und im abelschen Falle darstellungstheoretisch beantwortet.⁵ Doch wann existiert auf $H \backslash M$ wieder eine differenzierbare Struktur, und inwiefern ist sie mit den erwähnten Strukturen verträglich?

Nur wenn alle Standgruppen konjugiert sind, ist die Quotientenabbildung in kanonischer Weise ein differenzierbares Faserbündel. Für den nächstkomplizierteren Fall einer Speziellen H -Mannigfaltigkeit konstruiert Jänich auf dem Quotienten eine differenzierbare Struktur. Eine Variante dieser Struktur ist laut Bredon sogar kanonisch. Für allgemeine H -Mannigfaltigkeiten scheint die Frage in der Literatur nicht behandelt worden zu sein.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher im ersten Kapitel mit der Konstruktion einer differenzierbaren Struktur auf dem Quotienten einer beliebigen H -Mannigfaltigkeit: der Formulierung einer hinreichenden Voraussetzung, der Fixierung nötiger Wahlen und dem Einfluß der Wahlen auf die konstruierte Struktur.

Zunächst werden verschiedene Sorten von Objekten definiert: Eine äquivariante Mannigfaltigkeit verfeinert den Begriff der H -Mannigfaltigkeit, indem H normal in

¹siehe z. B. [Hirzebruch/Mayer], [Jänich] oder [Bredon]

²siehe [Lellmann]

³siehe [Verona], S. 128

⁴siehe [Bredon], S. 187

⁵siehe [Böhm] und Kapitel II

einer auf M operierenden, kompakten Liegruppe G liegt. H fungiert als „Teilungsgruppe“, G als Symmetriegruppe: Die bezüglich H gebildeten Orbits, Scheibendarstellungen und Strata sind — wie später auch Tubensysteme und Quotientenstrukturen — invariant unter G , und die Symmetriegruppe des Quotienten $H \backslash M$ ist der Quotient G/H .

Äquivariante Vektorräume sind treue orthogonale Darstellungen ohne trivialen Summanden. Ihre Isomorphieklassen heißen Scheibentypen;⁶ stabile Mengen von Scheibentypen sind Scheibendiagramme. Die Länge⁷ eines Scheibendiagramms dient als Maß seiner Kompliziertheit. Wichtigstes Beispiel eines Scheibendiagramms ist die Menge der Scheibentypen einer äquivarianten Mannigfaltigkeit.

Äquivariante Vektorbündel sind differenzierbare Faserbündel mit äquivarianten Vektorräumen als Fasern. Dies sind genau die Normalenbündel der Strata äquivarianter Mannigfaltigkeiten.

Die zweite Schicht nach den Objekten bilden die Tubensysteme: Dies sind verträgliche Familien von Tuben der jeweiligen Strata, wobei die Verträglichkeit rekursiv definiert wird. Tubensysteme existieren immer, und je zwei Tubensysteme eines Objekts sind isotop.

Das eigentliche Interesse gilt aber der dritten Schicht: den Quotientenstrukturen. Eine Quotientenstruktur einer äquivarianten Mannigfaltigkeit ist die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit auf ihrem Quotienten mit wiederum rekursiv definierten Verträglichkeitseigenschaften. Analog soll der Quotient eines äquivarianten Vektorraums oder -bündels wieder ein euklidischer Vektorraum bzw. ein riemannsches Vektorbündel sein. Quotientenstrukturen der linearen Objekte „äquivarianter Vektorraum“, „Scheibentyp“ und „Scheibendiagramm“ heißen auch Linearisierungen. Tubensystem und Quotientenstruktur einer äquivarianten Mannigfaltigkeit sind stets in Bezug auf ein Tubensystem und eine Quotientenstruktur ihres Scheibendiagramms definiert.

Satz I 7.7. *Sei M eine äquivariante Mannigfaltigkeit, φ ein Tubensystem ihres Scheibendiagramms Δ und ψ ein Tubensystem von M über φ . Dann existiert über jeder Linearisierung von (Δ, φ) genau eine Quotientenstruktur von (M, ψ) .*

Dieser Satz leistet den Schritt von „lokal“ nach „global“: Die (Existenz einer) Linearisierung des lokalen Datums „Scheibendiagramm“ führt zur (Existenz einer) globalen differenzierbaren Struktur auf dem Orbitraum. Letztere ist dadurch charakterisiert, daß die Quotienten der Tuben der Strata Tuben der Quotienten der Strata sind.

Bei kompakten Objekten kann man sich durch Übergang zu Isotopieklassen von den Tubensystemen befreien:

⁶Ich verwende größere Scheibentypen und Scheibendiagramme als Jänich.

⁷auch Tiefe oder Höhe genannt

Satz I 8.11.

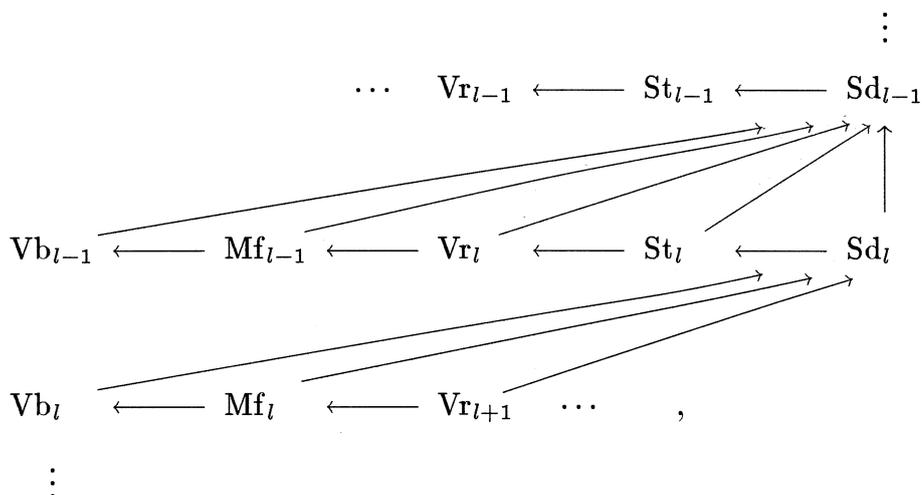
- (1) *Linearisierbarkeit ist eine wohldefinierte Eigenschaft von Scheibendiagrammen ohne Bezug auf Tubensysteme.*
- (2) *Eine Isotopieklasse von Linearisierungen des Scheibendiagramms einer kompakten äquivarianten Mannigfaltigkeit bestimmt eine Isotopieklasse differenzierbarer Strukturen auf ihrem Orbitraum.*

Wie steht es aber um Existenz und Eindeutigkeit von Linearisierungen? Ein äquivarianter Vektorraum ist genau dann linearisierbar, wenn seine Einheitssphäre eine Quotientenstruktur besitzt, so daß der Quotient der Einheitssphäre äquivariant diffeomorph zu einer Standardsphäre mit orthogonaler Operation ist. Durch kegelförmige Fortsetzung ist dann der Quotient des äquivarianten Vektorraums selber wieder ein euklidischer Vektorraum mit orthogonaler Operation.

Trotzdem ist Linearisierbarkeit kein sporadisches Phänomen, da es — sogar von jeder Länge größer als eins — unendlich viele linearisierbare Scheibentypen gibt. In 5.10 sind alle Linearisierungen von Scheibentypen der Länge zwei explizit angegeben. Eine Linearisierung eines nichtableschen Scheibentyps der Länge vier findet sich in IV 2.8.

Offen bleiben die Fragen, ob ein äquivarianter Vektorraum bereits linearisierbar ist, wenn sein Quotient eine topologische Mannigfaltigkeit ist, und, ob es zueinander nichtisotope Linearisierungen eines äquivarianten Vektorraums gibt.

In technischer Hinsicht prägen die rekursiven Definitionen der Begriffe Tubensystem und Quotientenstruktur das erste Kapitel. Sie folgen dem Schema



das heißt: Die Definition etwa von Quotientenstrukturen für äquivariante Vektorräume der Länge l setzt die entsprechende Definition für äquivariante Mannigfaltigkeiten der Länge $l-1$ sowie für Scheibendiagramme der Länge $l-1$ voraus. Inhaltlich wurde der Schritt von Mf_{l-1} nach V_{Γ_l} bereits als Kegelformung beschrieben.

Die Symmetriegruppe kommt beim Übergang von Vr_l nach Vb_l ins Spiel: Die Symmetriegruppe des äquivarianten Vektorraums ist gleichzeitig die Strukturgruppe des äquivarianten Vektorbündels. Mit ihrer Hilfe werden aus Tubensystem und Quotientenstruktur der Faser Tubensystem und Quotientenstruktur des Totalraums. Das Rekursive zeigt sich an dieser Stelle als Schachteln von Bündeln, und die Verträglichkeit der Tubensysteme und Quotientenstrukturen mit der Schachtelung ist entscheidend für das Zusammenpassen der Strata.

Der Schritt von Vb_k , $k \leq l$, nach Mf_l erfordert die Tubensysteme: Eine äquivariante Mannigfaltigkeit wird von offenen Umgebungen ihrer Strata überdeckt, und Tuben fixieren Diffeomorphismen zu den Normalenbündeln der Strata. Die differenzierbare Struktur auf dem Quotienten der Mannigfaltigkeit kann dadurch aus den differenzierbaren Strukturen auf den Quotienten der Normalenbündel zusammengesetzt werden.

Äquivariante Vektorräume zerfallen in Primfaktoren. Mit Blick auf das zweite Kapitel verbesserte Definitionen von Tubensystemen und Quotientenstrukturen harmonieren mit dieser Zerlegung. Die Aussagen des ersten Kapitels bleiben auch bei Verwendung der neuen Definitionen richtig.

Gegenstand des zweiten Kapitels sind Objekte mit abelschem Scheibendiagramm, d. h. jede auftretende Standgruppe, geteilt durch den Kern ihrer Scheibendarstellung, ist abelsch. In diesem Fall können die linearisierbaren Scheibentypen konkret beschrieben und die mögliche Lücke zwischen Orbiträumen, die topologische, und solchen, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, geschlossen werden.

Für abelsche Scheibentypen wird eine reelle bzw. 2-primäre Kodimension definiert. Die primen Scheibentypen der Kodimension 0 sind die Scheibentypen der Standarddarstellungen von S^1 und \mathbb{Z}_2 . In Kodimension 1 erhält man zwei Serien $(\sigma_a)_a$ und $(\tau^n)_n$. Die endlichen Produkte abelscher Scheibentypen der Kodimension 0 oder 1 bilden ein Scheibendiagramm Δ^{ab} . Seine Bedeutung klärt folgender Satz:

Satz II 5.11. *Für eine äquivariante Mannigfaltigkeit mit abelschem Scheibendiagramm sind äquivalent:*

- (1) *Ihr Orbitraum ist eine (berandete) topologische Mannigfaltigkeit.*
- (2) *Ihr Scheibendiagramm ist enthalten in Δ^{ab} .*
- (3) *Ihr Scheibendiagramm ist linearisierbar.*
- (4) *Auf ihrem Orbitraum existiert eine Struktur einer (glatt berandeten) differenzierbaren Mannigfaltigkeit.*

Der Rand ist genau dann leer, wenn nur Scheibentypen der Kodimension 1 auftreten.

Die Äquivalenz von (1) und (2) übersetzt eine topologische Eigenschaft der äquivarianten Mannigfaltigkeit in eine darstellungstheoretische. Der Beweis folgt aus [Böhm]

durch eine genaue Analyse der auftretenden Darstellungen. Die Implikation von (3) nach (4) leistet das erste Kapitel. (3) folgt seinerseits aus (2) durch Konstruktion einer Linearisierung von Δ^{ab} . Die Idee zur Linearisierung des Scheibentyps σ_a zeigt folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 G(a) \setminus \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_a} & \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1} & & G(a) \cdot z & \xrightarrow{\quad} & \omega_a\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot g^n(|z|) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 T^n \setminus \mathbb{C}^n & \cong & \mathbb{R}_{\geq 0}^n & \xrightarrow{g^n} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} & & T^n \cdot z & \xrightarrow{\quad} & |z| & \xrightarrow{\quad} & g^n(|z|)
 \end{array}$$

\mathbb{C}^n , geteilt durch den Torus, ist die kubische Ecke $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, die zum Halbraum $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ geglättet wird. Der Orbit $G(a) \cdot z$ besitzt über den Vektor $|z|$ der Beträge hinaus noch den Winkel $\omega_a\left(\frac{z}{|z|}\right)$ als Invariante. Dieser findet in der „Komplexifizierung“ $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$ des Halbraums Platz. Insgesamt ist f_a ein Homöomorphismus des Quotienten $G(a) \setminus \mathbb{C}^n$ zu einem euklidischen Vektorraum.

Daß die Familie $(f_a)_a$ und ihr 2-primäres Analogon tatsächlich eine Linearisierung von Δ^{ab} definieren, stellt starke Bedingungen an die Folge $(g^n)_n$ der Glättungen und die Tubensysteme der beteiligten Scheibentypen. Ich verbinde deshalb in jeder Dimension kubische Ecke und Halbraum durch eine Schar von Ecken mit variierendem Öffnungswinkel. Für diese Scharen, die komplexen Standardvektorräume und die komplexifizierten Halbräume konstruiere ich rekursiv einen kohärenten Satz von Tubensystemen. Ebenfalls rekursiv konstruiere ich eine Folge von Glättungen der gesamten Eckenscharen, die sowohl untereinander als auch mit den Tubensystemen zusammenspielen.

Als umfangreicheres Beispiel erscheint im dritten Kapitel die komplex projektive Ebene mit der komplexen Konjugation als Teilungsgruppe und $SO(3)$ als Symmetriegruppe. Ihr Orbitraum ist isomorph zur vierdimensionalen Sphäre, wie unabhängig voneinander in [Arnold I] erwähnt und in [Massey], [Kuiper] und [Arnold II] bewiesen.

Massey betrachtet eine Operation der Diedergruppe auf $S^2 \times S^2$. Die Quotienten nach verschiedenen Untergruppen bilden ein Diagramm von — teilweise verzweigten — Überlagerungen. Dadurch ist einer der Räume als homöomorph sowohl zu $\mathbb{C}P^2/(\bar{\quad})$ wie auch zu S^4 zu erkennen.

Kuiper bettet $\mathbb{C}P^2$ in der Art der Veronesefläche in die selbstadjungierten Abbildungen des \mathbb{C}^3 ein und erhält durch Mittelung über die $(\bar{\quad})$ -Operation eine Einbettung des Quotienten. Eine algebraisch-geometrische Argumentation erweist das Bild dieser Einbettung als S^4 . Die fragliche Isomorphie gilt nach Kuiper stückweise linear und daher sogar differenzierbar. Arnold behauptet anhand dieser Abbildung gleichfalls die Diffeomorphie, argumentiert jedoch geometrischer.

Inwieweit Kuipers und Arnolds differenzierbare Strukturen auf dem Quotienten intrinsisch sind, zeigt der folgende Satz. Er beweist zugleich die von Massey vermutete Äquivarianz der Homöomorphie.

Satz III 2.7. *Die äquivariante Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^2$ besitzt genau eine Isotopieklasse von Quotientenstrukturen, und mit dieser ist ihr Quotient $\mathbb{C}P^2/(\bar{})$ zur vierdimensionalen Standardsphäre $SO(3)$ -äquivariant diffeomorph.*

Die Menge der orientierten, normierten Ursprungsellipsen in einem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum V ist ein Modell der komplex projektive Ebene $P(V_{\mathbb{C}})$. Ihre geometrischen Eigenarten, bedingt durch $V_{\mathbb{C}}$ als Komplexifizierung eines euklidischen Vektorraums, lassen sich anschaulich deuten. Insbesondere entspricht die komplexe Konjugation dem Wechsel der Orientierung. Die Menge der unorientierten Ellipsen ist deshalb ein Modell des Orbitraums $P(V_{\mathbb{C}})/(\bar{})$. Die von Massey benutzte Isomorphie von $\mathbb{C}P^2$ zur zweiten symmetrischen Potenz von $\mathbb{C}P^1$ läßt sich mit Hilfe des Ellipsenmodells elementargeometrisch konstruieren.

Das im vierten Kapitel vorgestellte Beispiel bildete den Ausgangspunkt zur Untersuchung allgemeiner Quotienten in Kapitel I wie auch des speziellen Quotienten in Kapitel III: Auf $SU(3)$ operiert das Quadrat des maximalen Torus T der Diagonalmatrizen durch $((x, y), g) \mapsto xgy^{-1}$. Der Quotient $T \backslash SU(3) / T$ ist homöomorph zu S^4 .

Den allgemeineren Rahmen zeigt folgender Satz, dessen erster Teil eine Anwendung des zweiten Kapitels ist:

Satz IV 1.1. *Sei T ein maximaler Torus einer kompakten, zusammenhängenden Liegruppe K . Dann ist der Quotient $T \backslash K / T$ genau dann eine evtl. berandete Mannigfaltigkeit, wenn K für geeignete $k, l, m \geq 0$ lokal isomorph zu $U(1)^k \times SU(2)^l \times SU(3)^m$ ist. Der Quotient ist in diesem Falle homöomorph zu $I^l \times (S^4)^m$.*

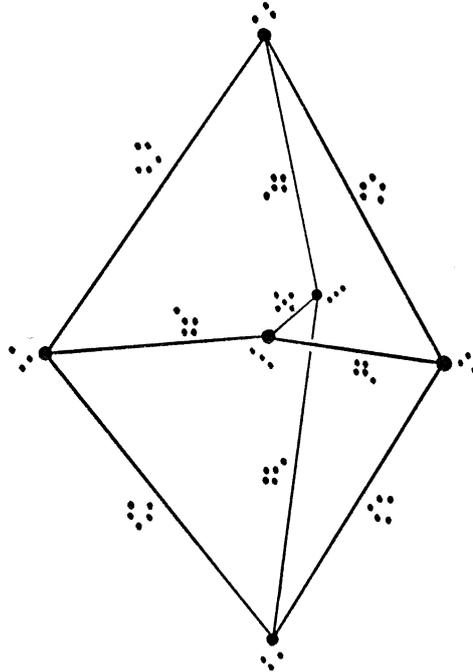
Als Symmetriegruppe der äquivarianten Mannigfaltigkeit $SU(3)$ betrachte ich den Normalisator von $T \times_{\mathbb{Z}_3} T$ in den Isometrien von $SU(3)$. Die Quotientensymmetriegruppe ist dann endlich und besitzt genau eine treue orthogonale Darstellung der Dimension fünf.

Vermutung. *Der Quotient $T \backslash SU(3) / T$ besitzt eine ausgezeichnete Isotopieklasse differenzierbarer Strukturen, und mit dieser ist er äquivariant diffeomorph zur vierdimensionalen Standardsphäre mit orthogonaler Operation.*

Als Annäherungen an diese Vermutung beweise ich

- (1) Der Quotient $T \backslash SU(3) / T$ besitzt eine ausgezeichnete Isotopieklasse differenzierbarer Strukturen.
- (2) Er ist homöomorph zu S^4 .
- (3) Er besitzt eine äquivariante topologische Einbettung in \mathbb{R}^5 durch invariante homogene Polynome zweiten und dritten Grades auf $SU(3)$.

Ein geometrisches Verständnis des Quotienten von $SU(3)$ beginnt mit dem in Zeichnung 25 abgebildeten Graphen. Seine Ecken bilden das tiefste, seine offenen Kanten das mittlere Stratum des Quotienten; es fehlt lediglich das Hauptstratum. Die Symmetriegruppe des Graphen ist, vermehrt um einen Faktor \mathbb{Z}_2 , gerade die Symmetriegruppe des Quotienten.



Zeichnung 25: Gerüst von $T \setminus SU(3) / T$ und $Q \setminus SO(3) / Q$

Aus der beidseitigen Operation von T auf $SU(3)$ ergibt sich durch Übergang zu den Fixpunkt Mengen der komplexen Konjugation die beidseitige Operation des maximalen 2-primären Torus Q auf $SO(3)$. Ihr Quotient liegt eingebettet im Quotienten von $SU(3)$ und besitzt bereits denselben Graphen der niederen Strata. Der Quotient $Q \setminus SO(3) / Q$ ist äquivariant diffeomorph zu S^3 . Bei der Homöomorphie (2) geht er in den Äquator über; bei der Einbettung (3) liegt er in einer Hyperebene. Durch eine geeignete Triangulierung von $SO(3)$ wird die Quotientenbildung nachvollziehbar und die Isomorphie zu S^3 explizit konstruiert.

Den ersten Beweis der Homöomorphie von $T \setminus SU(3) / T$ zu S^4 führte Prof. Dr. Matthias Kreck anhand des Graphen der niederen Strata auf algebraisch-topologischem Wege. Ein elementarer Beweis läßt sich mit Hilfe der komplexen Konjugation auf dem Quotienten skizzieren:

$$f: \begin{array}{ccc} (-) \setminus (T \setminus SU(3) / T) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ [A] & \longmapsto & (a_{ij} \overline{a_{ij}})_{i,j \leq 2} \end{array}$$

ist eine topologische Einbettung: die Bahn einer Matrix wird durch die Beträge ihrer

Einträge charakterisiert. Das Bild von f ist homöomorph zu D^4 , sein Rand ist gerade das Bild von $Q \backslash \mathrm{SO}(3) / Q$. Da letzteres die Fixpunktmenge der komplexen Konjugation ist, ist $T \backslash \mathrm{SU}(3) / T$ homöomorph zu $D^4 \cup_{S^3} D^4$.

Mein Dank gilt Prof. Dr. Matthias Kreck für die geduldige Betreuung dieser Arbeit. Er und Dr. Rainer Jung gaben mir das Gefühl, in Mainz stets willkommen zu sein. Am Bonner Mathematischen Institut und am Max-Planck-Institut für Mathematik konnte ich mit vielen über inhaltliche Fragen sprechen. Tillmann Klingholz begeisterte mich für $\mathrm{T}_\mathrm{E}\mathrm{X}$ und kritisierte scharf Satz und Stil. Susanne Dahlmann wirkte beharrlich auf die Verständlichkeit meines Seminarvortrags hin. Dorthé Herrmann las korrigierend weite Teile des Textes und holte mich von einigen Irrwegen zurück. Ihnen allen danke ich herzlich. Durch ihr Zuhören, ihre Ratschläge und manche nötige Diskussion haben sie Anteil an der Vollendung dieser Arbeit.

KAPITEL I

DIFFERENZIERBARE STRUKTUREN AUF ORBITRÄUMEN

§1 Äquivariante Mannigfaltigkeiten

Topologische Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Strukturen

1.1 Satz. *Sei M ein Hausdorffraum und zu jedem $x \in M$ gebe es eine offene Umgebung U und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U \approx \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

- (1) *M ist parakompakt.*
- (2) *M ist metrisierbar.*
- (3) *Jede Zusammenhangskomponente von M ist σ -kompakt.*
- (4) *Jede Zusammenhangskomponente von M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

BEWEIS. [Spivak], Appendix A. \square

Ein Raum M mit diesen Eigenschaften heißt eine (randlose) topologische Mannigfaltigkeit. Wann immer lediglich lokal konstante Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit — wie die Dimension — als konstant behandelt werden, sind ihre Zusammenhangskomponenten stillschweigend einzeln zu betrachten.

Eine Garbe \mathcal{E} reellwertiger Funktionen auf M , die lokal zur Garbe der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R}^n isomorph ist, heißt eine differenzierbare Struktur auf M ; gleichwertig dazu ist ein maximaler differenzierbarer Atlas von M . M zusammen mit \mathcal{E} heißt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wobei „differenzierbar“ in dieser Arbeit für „beliebig oft differenzierbar“ steht. Für Diffeomorphie verwende ich das Zeichen \simeq .

Operationen auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, G eine kompakte, reelle Liegruppe und

$\varrho: G \times M \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall g, h \in G, x \in M: \varrho(e, x) = x \wedge \varrho(gh, x) = \varrho(g, \varrho(h, x)),$$

wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Gleichwertig dazu ist die Angabe des ebenfalls mit ϱ bezeichneten Homomorphismus

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Diffeo}(M) \\ g &\longmapsto (x \mapsto \varrho(g, x)) \end{aligned}$$

topologischer Gruppen, wenn $\text{Diffeo}(M)$ mit der g -Topologie nach [Arens] versehen wird. M heißt dann differenzierbare G -Mannigfaltigkeit und G Transformationsgruppe, letzteres bereits, wenn G eine topologische Gruppe und M ein topologischer Raum ist. Zusammen mit einer invarianten riemannschen Metrik heißt M riemannsche G -Mannigfaltigkeit, G operiert dann durch Isometrien. Ausführliche Informationen über G -Mannigfaltigkeiten und Transformationsgruppen enthalten [Hirzebruch/Mayer], [Jänich] und [Bredon], an die sich die folgende Kurzeinführung anlehnt:

Sei $x \in M$ und $H < G$. Dann heißt $Gx := \{gx \in M \mid g \in G\}$ der Orbit oder die Bahn von x unter G , $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ die Standgruppe, die Isotropiegruppe oder der Stabilisator von x . Es ist $Gx \cong G/G_x$ und $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. $M^H := \{x \in M \mid Hx = x\}$ heißt die Fixpunktmenge von H . Weiter heißt $G \backslash M := \{Gx \mid x \in M\}$ der Orbitraum, Bahnenraum oder Quotient und $\omega: M \rightarrow G \backslash M$ die Quotientenabbildung der G -Mannigfaltigkeit M .

Zwischen beliebigen differenzierbaren Operationen und linearen Operationen vermitteln Operationen auf Vektorbündeln: So induziert ϱ die Operation

$$\begin{aligned} T\varrho: G &\longrightarrow \text{Aut}(TM) \\ g &\longmapsto (v \mapsto T(\varrho(g))v) \end{aligned}$$

sowie für jede invariante Untermannigfaltigkeit A die Operation $G \rightarrow \text{Aut}(NA)$, wobei NA das Normalenbündel von A in M bezeichnet. Der äquivariante Tubensatz besagt, daß für jede invariante Untermannigfaltigkeit A von M eine äquivariante offene Einbettung $\varphi: NA \rightarrow M$ existiert, so daß

$$\begin{array}{ccc} NA & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \cup & & \cup \\ 0_{NA} & \xrightarrow{\cong} & A \end{array}$$

kommutiert und $NA \cong N(0_{NA}) \xrightarrow{N\varphi} NA$ die Identität ist (vgl. 4.2). Dabei bezeichnet $0_{NA} := \{0_a \in NA \mid a \in A\}$ den Nullschnitt von NA .

Auch induziert ϱ verschiedene lineare Operationen der Standgruppe, nämlich die Darstellung $G_x \rightarrow \text{GL}(N_x A)$ für jede x enthaltende G_x -invariante Untermannigfalt-

tigkeit A . Sie heißt für $A = \{x\}$ die Isotropiedarstellung im Punkte x , für $A = Gx$ die Scheibendarstellung im Punkte x . Der Existenzsatz für Tubenumgebungen von Orbits heißt Scheibensatz und $\varphi(N_x Gx)$ eine Scheibe¹ durch x . Der Isomorphismus $G \times_{G_x} N_x Gx \rightarrow N Gx$ erweist das Normalenbündel eines Orbits als ein assoziiertes Vektorbündel zum G_x -Prinzipalbündel $G \rightarrow Gx$.

Die homogenen Räume G/H und G/K sind genau dann G -äquivariant diffeomorph, wenn H und K in G konjugiert sind—in Zeichen: $H \sim K$. Die Isomorphieklasse der G -Mannigfaltigkeit Gx oder, was gleichwertig ist, die Konjugationsklasse $(G_x) := \{gG_x g^{-1} \mid g \in G\} = \{G_y \mid y \in Gx\}$ heißt der Typ des Orbits Gx . Die Orbittypen sind durch Subkonjugation teilgeordnet, man schreibt $(H) \geq (K) : \Leftrightarrow \exists g \in G : H \subset gKg^{-1}$. Diese und nicht die inverse Anordnung entspricht dem natürlichen Empfinden bei den in Wirklichkeit gemeinten Orbits. Der Scheibensatz impliziert, daß die Standgruppen von Punkten einer Scheibe durch x nicht nur subkonjugiert zu, sondern enthalten in G_x sind, weiter, daß in einer Umgebung von x nur endlich viele Orbittypen auftreten und diese alle größer oder gleich (G_x) sind.

1.2 Mit $M_{(H)} := \{x \in M \mid G_x \sim H\}$, $M_H := \{x \in M \mid G_x = H\}$ und $N := \text{Nor}_G H$ ergibt sich

$$M_{(H)} = G \times_N M_H = G/H \times_{N/H} M_H \begin{array}{l} \nearrow G/N \\ \searrow N \backslash M_H = G \backslash M_{(H)}, \end{array}$$

d.h. $G/H \rightarrow M_{(H)} \rightarrow G \backslash M_{(H)}$ ist ein Faserbündel, genannt Orbitbündel, mit Strukturgruppe N/H , assoziiert zum Prinzipalbündel $M_H \rightarrow G \backslash M_{(H)}$, ferner ist $M_H \rightarrow M_{(H)} \rightarrow G/N$ ein Faserbündel mit Strukturgruppe N , assoziiert zum Prinzipalbündel $G \rightarrow G/N$. Beachte, daß die Rechtsoperation von N/H auf G/H wohldefiniert ist:

$$\begin{array}{ccc} G/H \times N/H & \longrightarrow & G/H. \\ (gH, nH) & \longmapsto & gnH \end{array}$$

Für die Vektorbündel $TM|_{M_{(H)}}$, $TM_{(H)}$ und $NM_{(H)}$ über $M_{(H)}$ gilt

$$\begin{array}{ccc} E & \xlongequal{\quad} & G \times_N E|_{M_H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(H)} & \xlongequal{\quad} & G \times_N M_H. \end{array}$$

Durch Induktion über die Dimension von M beweist man den

¹Tuben und Scheiben allgemeiner Transformationsgruppen sind allgemeiner definiert.

Satz vom Hauptorbittyp. *Hängt $G \setminus M$ zusammen, so gibt es genau einen Orbittyp (H) , so daß $M_{(H)}$ offen und dicht in M ist. $G \setminus M_{(H)}$ hängt dann ebenfalls zusammen.* 1.3

Ein Orbit Gx mit $G_x \sim H$, H aus dem obigen Satz, heißt ein Hauptorbit. Die Menge $M_{(H)}$ heißt das Hauptorbitbündel. Ist $G_x \approx H$, so heißt Gx ein Ausnahmeorbit, falls $\dim G_x = \dim H$, und ein singulärer Orbit, falls $\dim G_x > \dim H$.

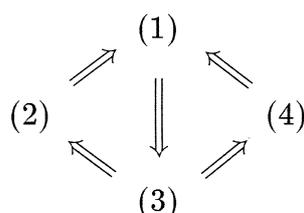
Homogene Operationen

Sei weiterhin ρ eine Operation einer kompakten Liegruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Den — freie Operationen einschließenden — einfachsten Fall beleuchtet der folgende

Satz. *Hängt $G \setminus M$ zusammen, so sind äquivalent:* 1.4

- (1) *Alle Orbits sind vom selben Typ.*
- (2) *$\omega: M \rightarrow G \setminus M$ ist ein topologisches Faserbündel.*
- (3) *$G \setminus M$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit, und es gibt auf ihr eine differenzierbare Struktur, durch die ω zu einem differenzierbaren Faserbündel wird.*
- (4) *$G \setminus M$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit, und es gibt auf ihr eine differenzierbare Struktur, durch die ω zu einer differenzierbaren Submersion wird.*

BEWEIS. Ich beweise die folgenden Implikationen:



(1) \Rightarrow (3) ist eine Standardaussage über Orbitbündel, siehe z.B. [Jänich], S. 6.

(3) \Rightarrow (2) und (3) \Rightarrow (4) sind trivial.

(2) \Rightarrow (1): Sei F die typische Faser von ω . Dann ist $F \approx G/G_x$ für jedes $x \in M$, $\dim G_x = \dim G - \dim F$ daher unabhängig von x . Aus den Homotopiesequenzen der Faserungen $G_x \rightarrow G \rightarrow F$ folgt $\pi_0(F) = \pi_0(G)/\pi_0(G_x)$, und die Anzahl der Zusammenhangskomponenten $\#\pi_0(G_x) = \frac{\#\pi_0(G)}{\#\pi_0(F)}$ ist ebenfalls unabhängig von x . Für jedes $y \in M$ aus dem Hauptorbitbündel und jedes $x \in M$ gibt es $g \in G$, so daß $G_x \supseteq G_{gy}$. Mit $\dim G_x = \dim G_{gy}$ und $\#\pi_0(G_x) = \#\pi_0(G_{gy})$ folgt $G_x = G_{gy}$. Daher gehört auch x zum Hauptorbitbündel.

(4) \Rightarrow (1): Ich beweise: Hat M mehrere Orbittypen und trägt $G \setminus M$ eine differenzierbare Struktur, so daß ω differenzierbar ist, so ist ω nicht submersiv.

Wähle ein $x \in M$, dessen Scheibendarstellung $\sigma: H \rightarrow O(V)$ genau zwei Orbittypen besitzt. Nenne die nichttriviale Komponente von V V' , die triviale V_{triv} . Es gilt

$0 \neq V' = V'_{(K)} \dot{\cup} 0$ für ein geeignetes $K \not\cong H$.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\text{offen}} & G \times_H V & \simeq & (G \times_H V') \times V_{\text{triv}} \\ \omega \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G \backslash M & \xleftarrow{\text{offen}} & H \backslash V & \approx & H \backslash V' \times V_{\text{triv}} \end{array}$$

Schreibe $e0 = [e, 0]$ für x und $T_H(G/H) \times V' \times V_{\text{triv}} \xrightarrow{T_{e0}\omega} T_H(H \backslash V)$ für das Tangential an ω im Punkte x . Wegen $\omega(\text{Nullschnitt}) = \{0\}$ ist $T_{e0}\omega|_{T_{eH}(G/H)}$ die Nullabbildung.

$T_{e0}\omega|_{V'} = 0$ ist ebenfalls die Nullabbildung: H besitzt als kompakte Liegruppe genau eine normierte, invariante Integration. Sei $v \in V'$ und $h \in H$. Aus $\omega \circ h = \omega$ folgt $T\omega(hv) = T(\omega \circ h)(v) = T\omega(v)$. Außerdem ist $\int_H hv \, dh = 0$, denn 0 ist der einzige Fixpunkt von V' unter H . Insgesamt erhalten wir

$$T\omega(v) = \int_H T\omega(v) \, dh = \int_H T\omega(hv) \, dh = T\omega\left(\int_H hv \, dh\right) = T\omega(0) = 0.$$

Schließlich impliziert die Surjektivität der Normabbildung $H \backslash V' \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, Hv \mapsto \|v\|$, daß $H \backslash V'$ mindestens eindimensional ist. Folglich ist $\dim H \backslash V > \dim V_{\text{triv}}$, folglich kann $T_{e0}\omega$ nicht mehr surjektiv sein. Beachte, daß weder verlangt noch behauptet wird, es sei $H \backslash V \simeq H \backslash V' \times V_{\text{triv}}$ für eine geeignete differenzierbare Struktur auf $H \backslash V'$.

Weniger elementar läßt sich statt (4) \Rightarrow (1) auch (4) \Rightarrow (3) beweisen, denn laut [Kirby/Siebenmann], S. 59, sind abgeschlossene differenzierbare Submersionen mit kompakten Fasern differenzierbare Faserbündel, zunächst nur im Sinne lokal trivialer differenzierbarer Abbildungen, dann aber auch mit der Diffeomorphismengruppe der Faser als Strukturgruppe, falls die Basis zusammenhängt. \square

Eigenschaft (4) ist [Eschenburg]'s Definition der Glattheit eines Orbitraumes. Sein Beweis von (4) \Rightarrow (1) (S. 9–10) überzeugt mich allerdings nicht. [Besse] erwähnt (4) \Rightarrow (1) in 9.12, S. 238, ohne Beweis.

Definition. Eine Operation einer kompakten Liegruppe auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heie homogen, wenn sie für jede Zusammenhangskomponente des Orbitraums die Eigenschaften des vorangegangenen Satzes erfüllt.

INDUZIERTER DIFFERENZIERBARE STRUKTUR

1.5 Sei (M, \mathcal{E}) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, X ein topologischer Raum und f eine stetige Surjektion von M auf X . Definiere auf X die induzierte Garbe reellwertiger

Funktionen $f_{\#}\mathcal{E}$ durch

$$\forall U \underset{\text{offen}}{\subset} X: \varphi \in f_{\#}\mathcal{E}(U) : \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}) \wedge \varphi \circ f \in \mathcal{E}(f^{-1}(U)),$$

siehe [Bredon], S. 297. Ist $(X, f_{\#}\mathcal{E})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so nenne $f_{\#}\mathcal{E}$ auch \mathcal{E}^{kan} — die bezüglich f kanonische differenzierbare Struktur auf X .

Zusatz zu 1.4. Die in (3) und (4) genannten differenzierbaren Strukturen sind eindeutig bestimmt; es ist in beiden Fällen $\omega_{\#}\mathcal{E}_M$.

BEWEIS. Für jede surjektive differenzierbare Submersion $\pi: (E, \mathcal{E}_E) \rightarrow (B, \mathcal{E}_B)$ ist $\mathcal{E}_B = \pi_{\#}\mathcal{E}_E$. \square

Operiert ϱ homogen, so existiert also die bezüglich ω kanonische differenzierbare Struktur auf $G \backslash M$; die differenzierbaren Funktionen auf $(G \backslash M, \mathcal{E}^{\text{kan}})$ entsprechen via Komposition mit ω umkehrbar eindeutig den invarianten differenzierbaren Funktionen auf M :

$$\begin{array}{ccc} (M, [\mathcal{E}_M]^G) & \searrow & (X, \mathcal{E}_X) \\ \omega \downarrow & & \nearrow \\ (G \backslash M, \mathcal{E}^{\text{kan}}) & \nearrow & \end{array}$$

Insbesondere sind so die differenzierbaren Strukturen auf den Quotienten $G \backslash M_{(H)}$ der Orbitbündel bei allgemeinem ϱ und auf den homogenen Räumen G/H erklärt. Auf $\omega_{\#}\mathcal{E}_M$ im Falle nicht homogener Operationen gehe ich in 7.13 kurz ein.

Äquivalente Mannigfaltigkeiten

Die im weiteren benutzte „differenzierbare Standardsituation“ ist eine geringfügige Verfeinerung des Begriffs der G -Mannigfaltigkeit:

Definition. Ein Quadrupel (H, G, ϱ, M) heie eine äquivalente Mannigfaltigkeit genau dann, wenn G eine kompakte Liegruppe, H ein Normalteiler von G , M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ϱ ein stetiger Homomorphismus von G nach $\text{Diffeo}(M)$ ist.

Bezeichne die Kategorie der äquivalenten Mannigfaltigkeiten, deren Morphismen in 4.17 definiert werden, mit Mf . Schreibe statt (H, G, ϱ, M) auch $H \triangleleft G \xrightarrow{\varrho} \text{Diffeo}(M)$ oder kürzer ϱ oder M .

G ist die „Symmetriegruppe“: Alles folgende — Stratifizierung, Tubensystem, differenzierbare Struktur des Orbitraums — wird, zumeist stillschweigend, G -äquivalent bzw. G -invariant sein. H ist die „Teilungsgruppe“: Scheibendarstellungen, Scheibendiagramm und Orbits werden bezüglich der H -Operation gebildet und schließlich wird

M durch H geteilt: $H \backslash M$.

$H \triangleleft G \xrightarrow{\varrho} \text{Diffeo}(M)$ induziert offenbar eine — selbst wenn ϱ effektiv ist, nicht unbedingt effektive — Operation $G/H \xrightarrow{\bar{\varrho}} \text{Hom}\ddot{o}(H \backslash M)$ des Quotienten G/H auf dem Quotienten $H \backslash M$. H als normal in G anzunehmen beschränkt insofern nicht die Allgemeinheit, als auf $H \backslash M$ ehemals nur noch $\text{Nor}_G H$ operiert. Ziel dieses Kapitels ist, grob gesprochen, bei dieser Operation $\text{Hom}\ddot{o}(H \backslash M)$ durch $\text{Diffeo}(H \backslash M)$ zu ersetzen.

Aus einer H -Mannigfaltigkeit erhält man natürlich durch die Setzung $G := H$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit. In Proposition 3.13 ist jedoch entscheidend, daß G größer als H sein darf.

§2 Äquivariante Vektorräume

Äquivalenzen von Darstellungen

NOTATION. σ bezeichne eine orthogonale Darstellung einer kompakten Liegruppe K auf einem euklidischen Vektorraum V . Schreibe $\sigma \in \text{Hom}(K, \text{O}(V))$, $K \xrightarrow{\sigma} \text{O}(V)$ oder $\sigma: K \times V \rightarrow V$. Treten mehrere Darstellungen auf, etwa σ und τ , so können K und V mit σ bzw. τ indiziert werden. Lediglich lineare Darstellungen werden ebenso bezeichnet. Für Vektorräume V und W bezeichne $\text{GL}(V, W)$ die Menge der linearen Isomorphismen, für euklidische Vektorräume bezeichne $\text{O}(V, W)$ die Menge der metrischen, linearen Isomorphismen.

2.1 Für Darstellungen $\sigma \in \text{Hom}(H_\sigma, \text{GL}(V_\sigma))$ und $\tau \in \text{Hom}(H_\tau, \text{GL}(V_\tau))$ kompakter Liegruppen kommen verschiedene Äquivalenz- oder Isomorphiebegriffe in Betracht:

(A1) $f \in L(V_\sigma, V_\tau)$ heie ein Morphismus von σ nach τ wenn $H_\sigma = H_\tau$ ist und

$$\begin{array}{ccc} H_\sigma \times V_\sigma & \xrightarrow{\sigma} & V_\sigma \\ \parallel & \downarrow f & \downarrow f \\ H_\tau \times V_\tau & \xrightarrow{\tau} & V_\tau \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Dies ist der übliche Morphismusbegriff für Operationen einer festen Gruppe. σ heie äquivalent zu τ , wenn σ zu τ isomorph ist. Dies ist der in der Darstellungstheorie übliche Äquivalenzbegriff.

(A2) [Jänich] definiert: Zwei Darstellungen σ und τ von Untergruppen von G haben denselben Scheibentyp, wenn es $g \in G$ und $f \in \text{GL}(V_\sigma, V_\tau)$ gibt, so daß

$$\begin{array}{ccc} H_\sigma & \xrightarrow{\sigma} & \text{O}(V_\sigma) \\ g \cdot \cdot g^{-1} \downarrow \cong & & \cong \downarrow f \circ \cdot \circ f^{-1} \\ H_\tau & \xrightarrow{\tau} & \text{O}(V_\tau) \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

(A3) $(\varphi, f) \in \text{Hom}(H_\sigma, H_\tau) \times L(V_\sigma, V_\tau)$ heie ein Morphismus von σ nach τ , wenn

$$\begin{array}{ccc} H_\sigma \times V_\sigma & \xrightarrow{\sigma} & V_\sigma \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f \\ H_\tau \times V_\tau & \xrightarrow{\tau} & V_\tau \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Dies ist der übliche Morphismusbegriff für Operationen. σ heie quivalent zu τ , wenn σ zu τ isomorph ist.

(A4) Zwei orthogonale Darstellungen σ und τ haben denselben groben Scheibentyp, wenn es $f \in O(V'_\sigma, V'_\tau)$ gibt, so daß

$$\begin{array}{ccc} \text{im } \sigma & \subset & O(V'_\sigma) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow f \circ \cdot \circ f^{-1} \\ \text{im } \tau & \subset & O(V'_\tau) \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Dabei bezeichnen V'_σ und V'_τ die nichttrivialen Summanden von V_σ bzw. V_τ (siehe 2.6).

Für die Beziehung zwischen linearen und orthogonalen Darstellungen siehe Proposition 2.5. Für die Herkunft von (A4) aus einem Morphismusbegriff siehe Definition 2.2.

Mit Äquivalenz ist in der Regel (A4) gemeint. (A1) spielt nur im Beweis des Lemmas 5.11 und in Lemma A.7 eine Rolle, weil dort Darstellungstheorie eingeht. (A2) tritt beim Vergleich mit (A4) in 2.9 und in Lemma 7.17 auf. (A3) und (A4) fallen für treue, orthogonale Darstellungen ohne trivialen Summanden zusammen.

quivalente Vektorräume

Ein Paar (K, V) heie ein quivarianter Vektorraum, wenn V ein euklidischer Vektorraum und K eine Untergruppe von $O(V)$ ist, so daß die Null der einzige Fixpunkt der K -Operation auf V ist.

2.2

Ein quivarianter Vektorraum ist demnach bis auf die Benennung der Gruppenelemente eine treue, orthogonale Darstellung ohne trivialen Summanden einer kompakten Liegruppe. Statt (K, V) schreibe ich auch $K \rightarrow O(V)$, V oder σ , wobei σ die Inklusionsabbildung von K in $O(V)$ bezeichnet. Umgekehrt schreibe ich K oder K_σ und V oder V_σ für die Bestandteile eines äquivarianten Vektorraums σ .

Seien σ und τ quivalente Vektorräume. Ein metrischer, linearer Isomorphismus $f: V_\sigma \rightarrow V_\tau$ mit $K_\tau = f \circ K_\sigma \circ f^{-1}$ heie ein Morphismus äquivarianten Vektorräume:

$$\begin{array}{ccc} K_\sigma & \subset & O(V_\sigma) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow f \circ \cdot \circ f^{-1} \\ K_\tau & \subset & O(V_\tau) \end{array}$$

\mathcal{V}_r bezeichne die Kategorie der äquivarianten Vektorräume. Ihre Morphismen sind sämtlich Isomorphismen. Die Gruppe der Automorphismen eines äquivarianten Vektorraums $K \rightarrow O(V)$ ist $\text{Aut}(V) = \text{Nor}_{O(V)} K$.

2.3 Die Isomorphieklasse $\mathfrak{s} = [\sigma]$ eines äquivarianten Vektorraums σ heie der (grobe) Scheibentyp von σ . \mathcal{S} bezeichne die Kategorie der Scheibentypen (mit den Identitäten als einzigen Morphismen). Auf die mengentheoretische Schwierigkeit, daß jeder Scheibentyp bereits eine echte Klasse ist, gehe ich in 9.1 ein.

2.4 Sei $K \rightarrow O(V)$ ein äquivarianter Vektorraum. $K \rightarrow O(V)$ induziert die äquivarianten Mannigfaltigkeiten $K \triangleleft \text{Aut}(V) \rightarrow \text{Diffeo}(V)$ durch Vergessen der euklidischen Struktur, $K \triangleleft \text{Aut}(V) \rightarrow \text{Diffeo}(V \setminus \{0\})$ durch Herausnehmen des Nullpunkts und $K \triangleleft \text{Aut}(V) \rightarrow \text{Diffeo}(S(V))$ durch weiteres Einschränken auf die Einheitskugel $S(V) := \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$.

Scheibentypen beliebiger linearer Darstellungen

2.5 **Proposition.** Sei G eine kompakte Liegruppe und V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann induziert $O(V) \hookrightarrow \text{GL}(V)$ eine Bijektion

$$\text{Hom}(G, O(V))/O(V) \longleftrightarrow \text{Hom}(G, \text{GL}(V))/\text{GL}(V).$$

Mit anderen Worten: In $\text{GL}(V)$ konjugierte orthogonale Darstellungen kompakter Liegruppen sind bereits in $O(V)$ konjugiert.

BEWEIS. Die Wohldefiniertheit ist klar. Die Surjektivität bedeutet gerade die Existenz eines invarianten Skalarprodukts. Zu zeigen bleibt die Injektivität:

Seien $\sigma, \tau \in \text{Hom}(G, O(V))$ und $A \in \text{GL}(V)$ mit $\tau(\cdot) \circ A = A \circ \sigma(\cdot)$. Zu zeigen ist die Existenz eines $C \in O(V)$ mit $\tau(\cdot) \circ C = C \circ \sigma(\cdot)$. Das folgende ist eine Art äquivariantes Gram-Schmidt-Verfahren für Abbildungen:

Wähle eine Zerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ in paarweise orthogonale, σ -irreduzible Unterräume. AV_i ist τ -irreduzibel und $F_i = \bigoplus_{j=1}^i AV_j$ definiert eine τ -invariante, aufsteigende Filtrierung von V . Definiere W_i induktiv durch $F_{i-1} \oplus W_i = F_i$. W_i ist τ -invariant, die orthogonale Projektion $p_i: F_i \rightarrow W_i$ τ -äquivariant. Der Vektorraumisomorphismus $B_i := (V_i \xrightarrow{A} F_i \xrightarrow{p_i} W_i)$ erfüllt $\tau|_{W_i} B_i = B_i \sigma|_{V_i}$. W_i ist daher sogar τ -irreduzibel. Invariante Skalarprodukte irreduzibler Darstellungen sind bis auf einen positiven Skalar eindeutig bestimmt. Das Skalarprodukt ϑ von V ist σ - und τ -invariant, $\vartheta(B_i^{-1} \cdot, B_i^{-1} \cdot)$ ist τ -invariant, folglich gleich $r_i^2 \vartheta|_{W_i}$ mit $r_i > 0$. Setze $C(\sum_i v_i) := \sum_i r_i B_i v_i$, wobei $v_i \in V_i$. C liegt in $O(V)$:

$$\begin{aligned} \vartheta(Cw, Cw') &= \vartheta\left(\sum_i r_i B_i w_i, \sum_i r_i B_i w'_i\right) \\ (\text{Die } V_i \text{ sind } \perp) \quad &= \sum_i r_i^2 \vartheta(B_i w_i, B_i w'_i) \end{aligned}$$

$$(Die\ W_i\ sind\ \perp) \qquad \qquad \qquad = \vartheta(w, w'),$$

wobei $w = \sum_i w_i, w' = \sum_i w'_i$ mit $w_i, w'_i \in W_i$. Schließlich gilt $\tau C = C\sigma$:

$$(\tau C)|_{V_i} = \tau|_{W_i} r_i B_i = r_i B_i \sigma|_{V_i} = (C\sigma)|_{V_i}. \quad \square$$

WESENTLICHER ANTEIL EINER DARSTELLUNG

Sei σ eine orthogonale Darstellung einer kompakten Liegruppe K auf einem euklidischen Vektorraum V . $V = V' \oplus V_{\text{triv}}$ bezeichne stets die Zerlegung des K -Moduls V in den nichttrivialen und den trivialen Summanden und σ' den durch die Faktorisierung 2.6

$$K \longrightarrow \text{im } \sigma \xleftarrow{\sigma'} O(V') \longrightarrow O(V)$$

definierten „wesentlichen Anteil“ von σ . Ist das Kompositum

$$K \longrightarrow Q \longrightarrow O(W) \longrightarrow O(V)$$

ebenfalls gleich σ , so liegt Q zwischen K und $\text{im } \sigma$ und W zwischen V' und V . Der wesentliche Anteil einer orthogonalen Darstellung ist ein äquivarianter Vektorraum.

Isomorphismen euklidischer Vektorräume überführen die wesentlichen Anteile ineinander: Für $f \in O(V)$ ist $f \circ \text{im } \sigma \circ f^{-1} \hookrightarrow O(fW)$ der wesentliche Anteil von $f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Orthogonale Darstellungen sind genau dann (A4)-äquivalent, wenn ihre wesentlichen Anteile (A3)-äquivalent sind. Für lediglich lineare Darstellungen gilt analoges.

Einer beliebigen linearen Darstellung $\sigma: K \rightarrow GL(V)$ läßt sich nun in natürlicher Weise ein Scheibentyp zuordnen: Wähle auf V ein invariantes Skalarprodukt ϑ . Sei $(\sigma, \vartheta)'$ der wesentliche Anteil der jetzt orthogonalen Darstellung. Definiere den Scheibentyp von σ als den Scheibentyp von $(\sigma, \vartheta)'$. Je zwei Wahlen von ϑ führen gemäß Proposition 2.5 und 2.6 zum selben Ergebnis, Bildung des wesentlichen Anteils von σ , gefolgt von der Wahl eines invarianten Skalarproduktes, ebenfalls. 2.7

Scheibendiagramme

Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Der Scheibentyp der Scheibendarstellung $\varrho_x: H_x \rightarrow GL(N_x H_x)$ ist gemäß 2.7 wohldefiniert und heiße der Scheibentyp der äquivarianten Mannigfaltigkeit M im Punkte x . 2.8

Sei $K \rightarrow O(V)$ ein äquivarianter Vektorraum. Fasse diesen als die äquivariante Mannigfaltigkeit $K \triangleleft \text{Nor}_{O(V)} K \rightarrow \text{Diffeo}(V)$ auf. Für $x \in V$ ist der wesentliche Anteil σ_x' seiner Scheibendarstellung σ_x wiederum ein äquivarianter Vektorraum. Die Setzung $\sigma_x' \geq \sigma$ definiert eine Teilordnung auf V_r , aus der man durch Übergang zu den Isomorphieklassen eine Teilordnung auf St erhält: Seien \mathfrak{t} und \mathfrak{s} Scheibentypen und $K \rightarrow O(V)$ ein Repräsentant von \mathfrak{s} . Genau dann ist $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{s}$, wenn \mathfrak{t} als Scheibentyp eines Punktes der äquivarianten Mannigfaltigkeit $K \triangleleft \text{Nor}_{O(V)} K \rightarrow \text{Diffeo}(V)$ auftritt. Der

größte Scheibentyp ist $\epsilon := [1 \rightarrow O(0)]$; es ist der Scheibentyp einer jeden trivialen Darstellung.

Eine Menge Δ von Scheibentypen, die mit einem Element auch alle größeren enthält, heie ein (grobes) Scheibendiagramm. Sd bezeichne die Kategorie der Scheibendiagramme mit den Inklusionen als einzigen Morphismen. Ein minimales Element eines Scheibendiagramms heie ein Fuß dieses Scheibendiagramms. Für $\mathfrak{s} \in \Delta$ heie

$$d(\mathfrak{s}) := \sup\{d \mid \exists \mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_d \in \Delta: \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s}_2 < \dots < \mathfrak{s}_d\}$$

die Tiefe und

$$h(\mathfrak{s}) := \sup\{h \mid \exists \mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_h \in \Delta: \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s}_2 < \dots < \mathfrak{s}_h = \mathfrak{s}\}$$

die Höhe von \mathfrak{s} . Wegen $\dim V'_\tau < \dim V'_\sigma$ für $\tau > \sigma$ ist die Tiefe eines jeden Scheibentyps endlich. Das Supremum $l(\Delta)$ der Mächtigkeiten der totalgeordneten Teilmengen heie die Länge von Δ —ein geeigneterer Name wäre vielleicht Ambitus. \emptyset ist das einzige Scheibendiagramm der Länge 0, und $\{\epsilon\}$ ist das einzige Scheibendiagramm der Länge 1.

Lemma. *Die Menge $\Delta(M)$ der Scheibentypen der Scheibendarstellungen einer äquivarianten Mannigfaltigkeit M ist ein Scheibendiagramm.*

BEWEIS. Sei $\sigma: K \rightarrow \text{GL}(V)$ die Scheibendarstellung eines Punktes $x \in M$ und $v \in V$. Zu zeigen ist, daß der Scheibentyp der Scheibendarstellung $\sigma_v: K_v \rightarrow \text{GL}(N_v K_v)$ der K -Mannigfaltigkeit V in $\Delta(M)$ liegt.

Nach dem Scheibensatz ist $H \times_K V$ H -äquvariant diffeomorph zu einer offenen Umgebung von x in M . Mit Hilfe des K -Prinzipalbündels $H \times V \rightarrow H \times_K V$ bestimme ich Standgruppe und Scheibe im Punkte $ev \in H \times_K V$: Es ist $H_{ev} = K_v$ und

$$N_{ev} H_{ev} \cong \frac{\frac{T_e H \times T_v V}{T_{(e,v)} K(e,v)}}{\frac{T_e H \times T_v K_v}{T_{(e,v)} K(e,v)}} \cong \frac{T_v V}{T_v K_v} = N_v K_v.$$

Damit ist aber die Scheibendarstellung in ev zu σ_v äquivalent, folglich gilt $[\sigma_v] \in \Delta(H \times_K V) \subset \Delta(M)$. \square

$\Delta(M)$ heie das Scheibendiagramm von M . Seine Länge übertrifft die Dimension von M um höchstens 1. Definiere die Länge einer äquivarianten Mannigfaltigkeit als die Länge ihres Scheibendiagramms.

Das Scheibendiagramm ist eine lokale Invariante in folgendem Sinne: Existiert zwischen äquivarianten Mannigfaltigkeiten M' und M ein surjektiver Mf-Morphismus $f: M' \rightarrow M$ —siehe Definition 4.17—, so ist $\Delta(M') = \Delta(M)$. Dies ist insbesondere erfüllt, wenn M' als die topologische Summe $\coprod_{\iota \in I} U_\iota$ einer invarianten offenen Über-

deckung $\{U_\iota \mid \iota \in I\}$ von M gewählt wird.

Das Scheibendiagramm eines äquivarianten Vektorraums V ist die Menge $\text{St}_{\geq[V]}$ aller Scheibentypen, die größer oder gleich $[V]$ sind. Der Nullpunkt ist der einzige Punkt von V mit Scheibentyp $[V]$. Das Scheibendiagramm der in 2.4 betrachteten äquivarianten Mannigfaltigkeiten $V \setminus \{0\}$ und $S(V)$ ist daher $\text{St}_{>[V]}$. Seine Länge ist um eins kleiner als die von $\text{St}_{\geq[V]}$. Dies ermöglicht die vielfältigen Rekursionen und Induktionen im Zusammenhang mit Tubensystemen und Quotientenstrukturen in den Paragraphen 4 bis 9.

VERGLEICH MIT JÄNICH'S SCHEIBENDIAGRAMM

2.9

Zu vorgegebener Gruppe G definiert [Jänich] den Scheibentyp zweier Darstellungen σ und τ von Untergruppen von G wie in 2.1 unter (A2) ausgeführt. Auf diesen Scheibentypen definiert „ $[\tau] > [\sigma]$ “: $\Leftrightarrow [\tau]$ ist der Typ einer Scheibendarstellung der G -Mannigfaltigkeit $G \times_{H_\sigma} V_\sigma$ eine Teilordnung. Schließlich heißt eine \geq -stabile Menge von Scheibentypen ein Scheibendiagramm.

Die *grogen* Scheibentypen und *grogen* Scheibendiagramme sind eine Abwandlung von Jänichs Konzept in vier Punkten:

- (1) Es werden orthogonale Darstellungen betrachtet.
- (2) Es wird auf keine umgebende Gruppe Bezug genommen.
- (3) Der Kern einer Darstellung bleibt unberücksichtigt.
- (4) Der triviale Summand einer Darstellung bleibt unberücksichtigt.

Sie erfolgte im Hinblick auf die Definition der verschiedenen Quotientenstrukturen:

- (i) Die Orthogonalität (1) ist für die Definition 2.3 der *grogen* Scheibentypen unerheblich (siehe 2.7), nicht aber für die Definition 5.2 der Vr-Quotientenstrukturen (siehe Bemerkung 5.7).
- (ii) Die Definition 7.5 einer Mf-Quotientenstruktur setzt die Wahl einer Sd-Quotientenstruktur voraus. Damit eine Sd-Quotientenstruktur, d. h. eine Linearisierung eines Scheibendiagramms, für möglichst viele äquivariante Mannigfaltigkeiten gleichzeitig verwendbar ist, enthält, was in (2) bis (4) zum Ausdruck kommt, ein Scheibendiagramm so wenig Information wie möglich, dennoch so viel wie zur Definition 5.4 einer Sd-Quotientenstruktur nötig.
- (iii) Insbesondere kann (4) verlangt werden, da eine Mf-Quotientenstruktur mit Hilfe der Normalenbündel der Scheibentypenstrata erklärt wird. Deren Fasern sind nämlich laut Lemma 2.13 die nichttrivialen Summanden der Scheibendarstellungen.

Jänichs Scheibentypen und Scheibendiagramme treten in dieser Arbeit nur selten auf, und nur, wo ich eine Verwechslung meiner mit Jänichs befürchte, nenne ich meine Scheibentypen und -diagramme *grob*.

Stratifizierungen

2.10 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Menge \mathbf{S} paarweise disjunkter — Strata genannter — Untermannigfaltigkeiten von M heißt eine Stratifizierung von M , wenn gilt:

- (1) Jeder Punkt von M besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Strata schneidet.
- (2) Schneidet ein Stratum den Abschluß eines anderen, so liegt es bereits ganz in diesem Abschluß.

Eigenschaft (1) wird lokale Endlichkeit, (2) wird Randbedingung genannt.

$X \leq Y: \Leftrightarrow X \subset \bar{Y}$ definiert eine Teilordnung auf \mathbf{S} ; bezüglich dieser sind Höhe $h(X)$ und Tiefe $d(X)$ eines Stratums X und Länge $l(\mathbf{S})$ der Stratifizierung gemeint.

\mathbf{S} heißt Whitney-Stratifizierung, wenn zusätzlich je zwei Strata Whitneys Bedingung (b) erfüllen; siehe etwa [Mather I], S. 14, oder [Lellmann], S. 20. Allerdings spielt der Begriff in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle, da alle betrachteten Stratifizierungen von Mannigfaltigkeiten Tubensysteme zulassen (siehe Korollar 4.19 und Proposition II 3.9), welches eine schärfere Bedingung darstellt.

2.11 Sei eine äquivariante Mannigfaltigkeit $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ gegeben. Setze für $\mathfrak{s} \in \text{St}$ $M_{\mathfrak{s}} := \{x \in M \mid \mathfrak{s} \text{ ist der Scheibentyp in } x\}$. Nach [Lellmann], S. 21, i. V. m. Lemma 2.12 ist $\{M_{\mathfrak{s}} \mid \mathfrak{s} \in \Delta(\rho)\}$ eine Whitney-Stratifizierung, welche die Scheibentypenstratifizierung der äquivarianten Mannigfaltigkeit M heißen soll. Die Strata wurden mit Hilfe der H -Operation definiert, sie sind jedoch G -invariant: Da H normal in G liegt, ist nämlich

$$gH_xg^{-1} = g(G_x \cap H)g^{-1} = gG_xg^{-1} \cap H = G_{gx} \cap H = H_{gx}$$

und $gHx = Hgx$ für $g \in G$, weshalb

$$\begin{array}{ccc} H_x \times T_x M / T_x Hx & \longrightarrow & T_x M / T_x Hx \\ \downarrow & & \downarrow \\ gH_xg^{-1} \times T_{gx} M / T_{gx} gHx & \longrightarrow & T_{gx} M / T_{gx} gHx \\ (h, v + T_x Hx) & \longmapsto & hv + T_x Hx \\ \downarrow & & \downarrow \\ (ghg^{-1}, gv + T_{gx} gHx) & \longmapsto & ghv + T_{gx} gHx \end{array}$$

eine Äquivalenz der jeweiligen Scheibendarstellungen ist.

Teilt man die Isotropiedarstellungen der H -Mannigfaltigkeit M in mehr oder weniger feine „vernünftige“ Äquivalenzklassen ein, so erhält man Stratifizierungen von M , die

sich nur um Zusammenhangskomponenten unterscheiden:

Lemma. Sei M eine H -Mannigfaltigkeit und m ein Punkt von M . Setze

2.12

$$X := \{ x \in M \mid \dim H_x = \dim H_m \wedge \#\pi_0(H_x) = \#\pi_0(H_m) \} \quad \text{und}$$

$$Y := \{ y \in M \mid \text{Jänichs Typen der Scheibendarstellungen in } y \text{ und } m \text{ sind gleich} \}.$$

Dann gibt es eine H -invariante Umgebung U von m in M mit $X \cap U = Y \cap U$.

DER BEWEIS folgt leicht mit Hilfe des Scheibensatzes. \square

Die meisten Aussagen gelten daher gleichermaßen für alle diese Stratifizierungen. Dieses Phänomen ist für Stratifizierungen typisch. Mather reserviert das Wort „Stratifizierung“ deshalb für einen in [Mather II] eingeführten, von Zusammenhangsfragen unabhängigen Begriff.

Die Existenz des größten Scheibentyps ϵ sichert die Existenz des größten Scheibentypenstratum M_ϵ , genannt das Hauptstratum von M . Bei zusammenhängendem Quotienten $H \backslash M$ ist es gleich dem in 1.3 definierten Hauptorbitbündel. Damit klärt sich auch die Bedeutung des Begriffs der homogenen Operation:

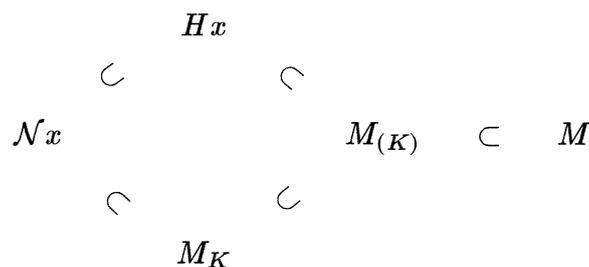
$$H \text{ operiert homogen auf } M \iff M = M_\epsilon \iff \Delta(M) = \{\epsilon\} \iff l(\Delta(M)) = 1$$

LOKALE SITUATION

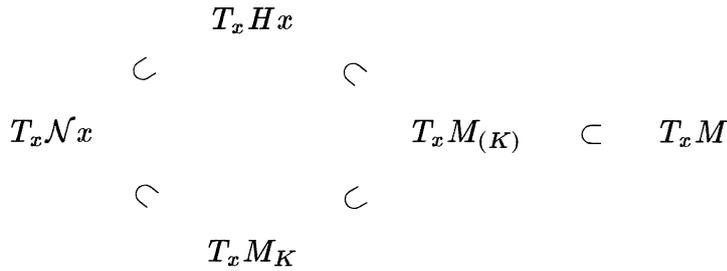
Sei M eine äquivariante Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Die H -Operation gibt Anlaß zur Definition verschiedener Untergruppen von H , nämlich der Standgruppe $K := H_x$ und ihres Normalisators $\mathcal{N} := \text{Nor}_H K$:

$$K \triangleleft \mathcal{N} < H$$

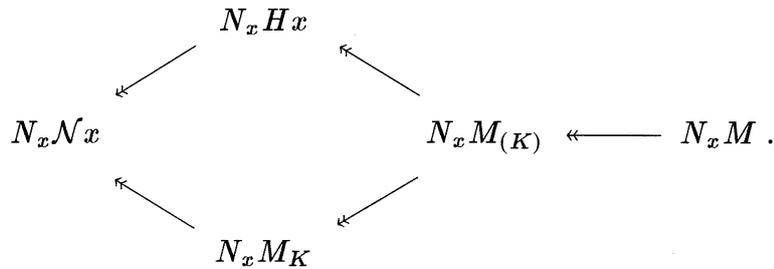
Desweiteren liegen verschiedene x enthaltende Untermannigfaltigkeiten von M nahe zu betrachten: Der \mathcal{N} -Orbit $\mathcal{N}x$ von x , der H -Orbit Hx , die Menge M_K der Elemente mit derselben Standgruppe wie x und die Menge $M_{(K)}$ der Elemente mit zu K in H konjugierter Standgruppe:



$\mathcal{N}x$ und M_K sind bloß \mathcal{N} -invariant. Hx und $M_{(K)}$ sind ihre H -invarianten „Erzeugnisse“, weshalb $Hx \cong H \times_{\mathcal{N}} \mathcal{N}x$ und $M_{(K)} \cong H \times_{\mathcal{N}} M_K$ gilt. Umgekehrt ist $\mathcal{N}x$ der Schnitt von Hx und M_K . Obiges Diagramm führt zu Inklusionen der Tangentialräume



und Quotientenabbildungen zwischen den Normalenräumen



Die K -Operation spaltet diese Vektorräume in nichttrivialen Summanden $(\)'$ und trivialen Summanden $(\)_{\text{triv}}$: Der triviale Summand von $T_x M$ ist gerade $T_x M_K$, folglich ist $T_x M_{(K)} = (T_x M_{(K)})_{\text{triv}} + T_x Hx$. Über $T_x Hx$ läßt sich i. a. nichts aussagen. Da $Hx \cong H/K$ überdies nur gruppentheoretische Information enthält, teilt man $T_x Hx$ aus $T_x M$ heraus und erhält die sog. Scheibe $N_x Hx$. Für diese gilt nun das

2.13 Lemma. *Das Kompositum $(N_x Hx)' \hookrightarrow N_x Hx \twoheadrightarrow N_x M_{(K)}$ ist ein Isomorphismus, d. h. in jedem Punkt ist der Normalenraum am Stratum gerade der nichttriviale Summand der Scheibe.*

BEWEIS. Nach dem Scheibensatz kann $M = H \times_K V$ und $x = [e, 0]$ angenommen werden. Dann ist $V \rightarrow M \rightarrow H/K$ ein Vektorbündel, $Hx = H \times_K \{0\}$ sein Nullschnitt und $M_{(K)}$ der Totalraum des Unterbündels $V_{\text{triv}} \rightarrow M \rightarrow H/K$. Aus

$$T_x M \cong V \oplus T_x Hx, \quad T_x M_{(K)} \cong V_{\text{triv}} \oplus T_x Hx \quad \text{und} \quad N_x Hx \cong V$$

folgt die Behauptung $(N_x Hx)' \cong N_x M_{(K)}$. \square

Dies verschärft die bekannte Aussage, daß die Scheibendarstellung eines Punktes des Hauptorbitbündels trivial ist. Wegen Lemma 2.12 gilt Lemma 2.13 ebenso für das Scheibentypenstratum anstelle des Orbittypenstratums.

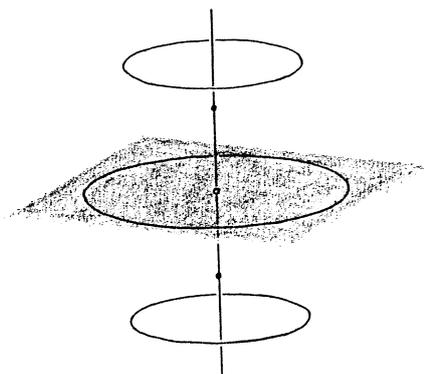
BEISPIEL. Die Teilungsgruppe $H := \{(A, B) \in O(2) \times O(1) \mid B = \det A\}$ und die Operation

$$\begin{aligned}
 \varrho: (O(2) \times O(1)) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 ((A, B), x) &\longmapsto \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x
 \end{aligned}$$

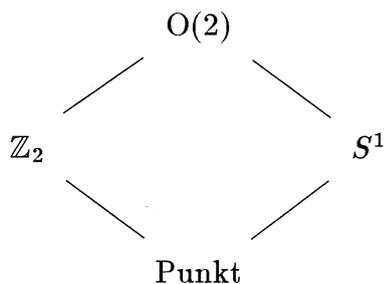
definieren die äquivariante Mannigfaltigkeit $H \triangleleft O(2) \times O(1) \xrightarrow{e} \text{Diffeo}(\mathbb{R}^3)$. Diese zeigt trotz niedriger Dimension bereits „allgemeine“ Züge:

- (1) Es sind sowohl Ausnahme- als auch singuläre Orbits vorhanden.
- (2) Eine der Konjugationsklassen der Standgruppen ist nichttrivial.
- (3) Es treten triviale wie nichttriviale Darstellungen der Standgruppe auf dem Tangentialraum des Orbits auf.
- (4) Es gibt miteinander nicht vergleichbare Scheibentypen.

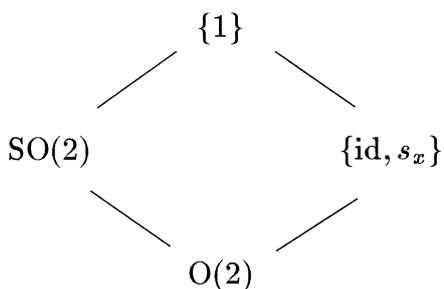
Skizze



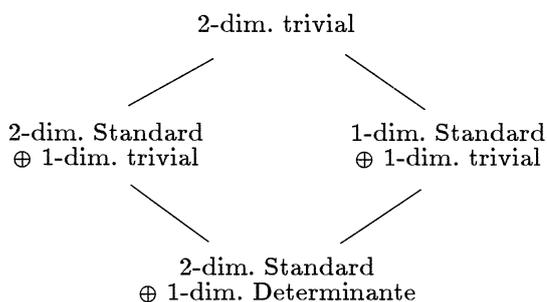
Orbits Hx



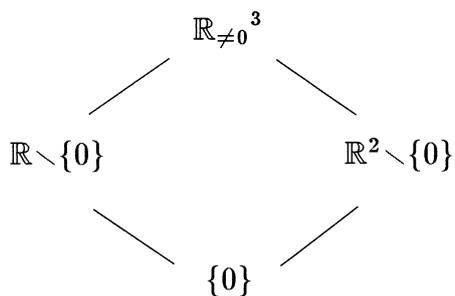
Standgruppen H_x



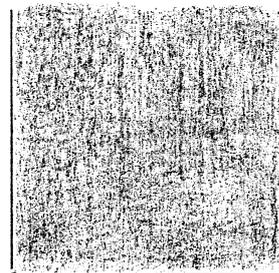
Scheibendarstellungen $\rho_x: H_x \rightarrow GL(N_x H_x)$



Strata $M_\mathfrak{s}$



Skizze des Quotienten



Die Diagramme und Zeichnungen geben eine Zusammenstellung der eingeführten Begriffe. Dabei sind \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^1 als die Teilmengen $\mathbb{R}^2 \times 0$ und $0 \times \mathbb{R}^1$ des \mathbb{R}^3 aufzufassen. Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet s_x die Spiegelung an $\mathbb{R}x$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ wird $T_x\mathbb{R}^3$ mit \mathbb{R}^3 identifiziert. Da $\varrho|_H$ eine Darstellung ist, ist die Isotropiedarstellung in x die Einschränkung von $\varrho|_H$ auf die Standgruppe H_x . Die Skizze zeigt die verschiedenen Strata sowie einen Orbit jeden Typs. Das Scheibendiagramm besteht aus vier in Form einer Raute angeordneten Elementen; sein Fuß ist $[\varrho|_H]$, seine Länge ist 3.

§3 Äquivariante Vektorbündel

Reduktion der Strukturgruppe bei äquivalenten Prinzipalbündeln

3.1 AFFINE GRUPPENRÄUME

Sei $A \times \mathcal{S} \rightarrow A$ eine einfach transitive, differenzierbare Rechtsoperation einer kompakten Liegruppe. $\text{Aut}(A)$ bezeichne die \mathcal{S} -äquivariante Diffeomorphismen von A . Für $a, b \in A$ bezeichne $a \setminus b$ das eindeutig existierende Element von \mathcal{S} mit $a \cdot a \setminus b = b$. Jedes $o \in A$ stiftet den Isomorphismus rechter \mathcal{S} -Räume

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longleftrightarrow & A \\ s & \longmapsto & os \\ o \setminus a & \longleftarrow & a \end{array}$$

und den Isomorphismus topologischer Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longleftrightarrow & \text{Aut}(A), \\ s & \longmapsto & (a \mapsto os \cdot o \setminus a) \\ o \setminus f(o) & \longleftarrow & f \end{array}$$

so daß insgesamt das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (t, r, s) & \longmapsto & trs \\ \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Aut}(A) \times A \times \mathcal{S} & \longrightarrow & A \end{array}$$

kommutiert.

3.2 ÄQUIVARIANTE PRINZIPALBÜNDEL

Sei H ein Normalteiler einer kompakten Liegruppe G , $P \xrightarrow{\pi} B$ ein differenzierbares Prinzipalbündel mit der kompakten, lischen Strukturgruppe \mathcal{S} und ϱ eine differen-

zierbare Operation von G auf P durch Prinzipalbündelautomorphismen, d. h. die Operationen von G und S auf P kommutieren: $G \times P \times S \rightarrow P, (g, p, s) \mapsto gps$, weshalb G auch auf B operiert.

Sei $p \in P$ und $b := \pi(p)$. Die Standgruppe H_b operiert auf der Faser P_b durch Automorphismen, da p aber gemäß 3.1 einen Isomorphismus zwischen $\text{Aut}(P_b)$ und S stiftet, erhalten wir insgesamt den Morphismus $H_b \rightarrow S, h \mapsto p \setminus hp$, den ich mißbräuchlich Isotropieoperation von $\varrho|_H$ im Punkte p nennen will. Setze $\mathcal{K}(p) := \text{im } \iota_p$ und $\mathcal{N}(p) := \text{Nor}_S \text{ im } \iota_p$. Für $g \in G$ und $s \in S$ ist

3.3

$$\iota_{gps} = s^{-1} \iota_p (g^{-1} \cdot \cdot \cdot g) s,$$

folglich $\mathcal{K}(gps) = \mathcal{K}(ps) = s^{-1} \mathcal{K}(p) s$ und $\mathcal{N}(gps) = \mathcal{N}(ps) = s^{-1} \mathcal{N}(p) s$.

Definition. Ein Quadrupel (H, G, ϱ, P) heißt äquivariantes Prinzipalbündel, wenn G eine kompakte Liegruppe, H ein Normalteiler von G , $P \rightarrow B$ ein differenzierbares Prinzipalbündel mit nichtleerer Basis B und kompakter, lischer Strukturgruppe S und ϱ ein stetiger Homomorphismus von G nach $\text{Aut}(P)$ ist, so daß die H -Operation auf B homogen ist und alle $\text{im } \iota_p, p \in P$, in S konjugiert sind. Schreibe statt (H, G, ϱ, P) auch $H \triangleleft G \xrightarrow{\varrho} \text{Aut}(P)$ oder kürzer ϱ oder P .

Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(P)$ ein äquivariantes Prinzipalbündel mit Strukturgruppe S und $H' \triangleleft G' \rightarrow \text{Aut}(P')$ ein äquivariantes Prinzipalbündel mit Strukturgruppe S' ,

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varkappa} & H' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\lambda} & G' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Liegruppenmorphisimen, $\mu: S \rightarrow S'$ ein Isomorphismus, $f: P \rightarrow P'$ eine $\lambda \times \mu$ -äquivariante Abbildung, so daß für $p \in P$ $\mu(\text{im } \iota_p) = \text{im } \iota_{f(p)}$ gilt. Dann heißt $(\varkappa, \lambda, \mu, f)$ ein Morphismus äquivarianter Prinzipalbündel. Schreibe statt $(\varkappa, \lambda, \mu, f)$ kurz f . Dies definiert die Kategorie Pb.

Sei nun P ein äquivariantes Prinzipalbündel. Betrachte die Operation

3.4

$$\begin{aligned} (H \times S) \times P &\longrightarrow P. \\ ((h, s), p) &\longmapsto hps^{-1} \end{aligned}$$

Die Standgruppe von $p \in P$ ist genau der Graph der Isotropieoperation ι_p :

$$(H \times S)_p = \{ (h, s) \in H \times S \mid h \in H_{\pi(p)} \wedge s = \iota_p(h) \}$$

Daraus folgt mit Hilfe von Korollar C.3, daß $H \times S$ homogen auf P operiert.

3.5 Satz. Sei P ein äquivariantes Prinzipalbündel und $o \in P$. Dann ist

$$R(o) := \{ p \in P \mid \mathcal{K}(p) = \mathcal{K}(o) \}$$

eine G -invariante Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{N}(o)$. $\{ (R(p), \mathcal{N}(p)) \mid p \in P \}$ ist gerade eine Konjugationsklasse von Reduktionen (siehe Definition B.2). $R(o)$ ist selbst wieder ein äquivariantes Prinzipalbündel. Ein Pb-Morphismus $f: P \rightarrow P'$ schränkt sich zu einem Pb-Morphismus $R(o) \rightarrow R(f(o))$ ein.

BEWEIS. Setze $L := (H \times \mathcal{S})_o$. An die Bezeichnung $P_L = \{ p \in P \mid (H \times \mathcal{S})_p = L \}$ sei erinnert. Es ist

$$\text{Nor}_{H \times \mathcal{S}} L = \{ (h, s) \in H \times \mathcal{S} \mid h \in \text{Nor}_H H_{\pi_o} \wedge \iota_{h o s^{-1}} = \iota_o \} \subset \text{Nor}_H H_{\pi_o} \times \mathcal{N}(o).$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $H \backslash P / \mathcal{S} = H \backslash B$ zusammenhängend. Dann ist $P = P_{(L)} \cong (H \times \mathcal{S}) \times_{\text{Nor } L} P_L$ und $R(o) \cong (H \times \mathcal{N}(o)) \times_{\text{Nor } L} P_L$. $\mathcal{N}(o)$ operiert auf $R(o)$ frei von rechts mit $R(o) / \mathcal{N}(o) \cong P / \mathcal{S}$.

Wegen $\mathcal{K}(gp) = \mathcal{K}(p) = \mathcal{K}(o)$ für $p \in R(o)$ und $g \in G$ ist auch $gp \in R(o)$, $R(o)$ mithin G -invariant. Zu $p \in P$ gibt es $s \in \mathcal{S}$ mit $ps^{-1} \in R(o)$. $R(p) = R(o)s = R(os)$ und $\mathcal{N}(p) = s^{-1}\mathcal{N}(o)s = \mathcal{N}(os)$ zeigt die Aussage über die Konjugationsklasse. Die letzten Aussagen folgen leicht aus den jeweiligen Definitionen. \square

3.6 Das Konjugieren von Reduktionen läßt sich als ein Pb-Isomorphismus auffassen: $s \in \mathcal{S}$ konjugiere $R(o)$ in $R(p)$, d. h. $R(p) = R(o)s$ und $\mathcal{N}(p) = s^{-1}\mathcal{N}(o)s$. Setze

$$\begin{array}{ccc} f: R(o) & \longrightarrow & R(p) \\ r & \longmapsto & rs \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \mu: \mathcal{N}(o) & \longrightarrow & \mathcal{N}(p) \\ n & \longmapsto & s^{-1}ns \end{array}.$$

Dann ist $(\text{id}_H, \text{id}_G, \mu, f)$ ein Pb-Isomorphismus.

VERTRÄGLICHKEIT MIT SCHACHELUNG

Sei (ξ, μ, ν, η) ein geschachteltes Prinzipalbündel (siehe Definition B.4), auf dem $H \triangleleft G$ operiere, soll heißen: G operiert durch ein gegebenes ϱ_ν auf $P_\nu = P_\xi$ und durch $\varrho_\mu := \varrho_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} \text{id}_{P_\eta}$ auf $P_\mu = P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} P_\eta$. Es genügt die Vorgabe der symbolisch mit

$$\begin{array}{ccccc} & & P_\nu & & P_\eta \\ & \circlearrowleft & & \circlearrowright & \\ & & & & \\ G & & & & \mathcal{S}_\eta \\ & & \mathcal{S}_\nu & & \\ \nabla & & & & \\ & & H & & \end{array}$$

bezeichneten Daten. Sei $o \in P_\nu$, $p \in P_\eta$ und $b := \pi_\eta(p)$. Die Isotropieoperation von $\varrho_\mu|_H$ im Punkte $op := [o, p] \in P_\mu$ läßt sich durch diejenigen von $\varrho_\nu|_H$ in o und von $\alpha_\nu|_{\mathcal{K}(o)}$ in p ausdrücken:

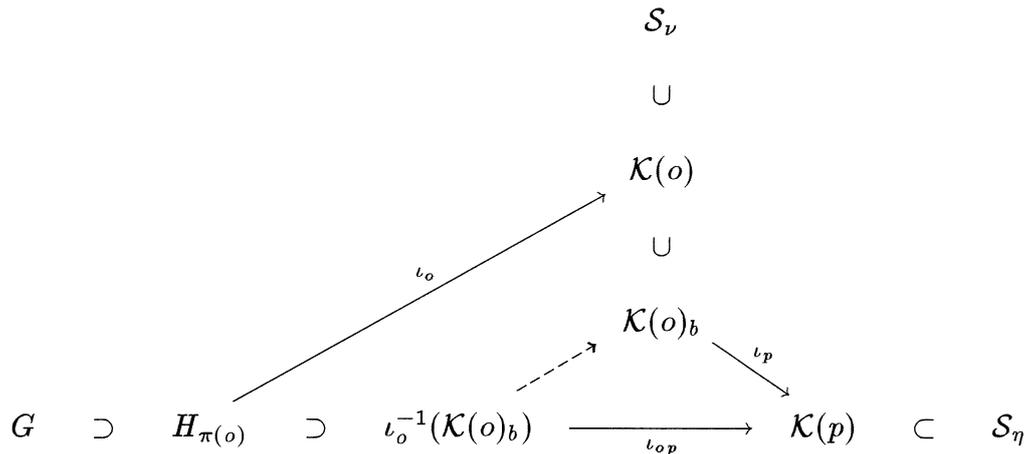
Lemma.

3.7

- (1) $H_{ob} = \iota_o^{-1}(\mathcal{K}(o)_b)$ ist die Definitionsmenge,
- (2) $\iota_{op} = \iota_p \circ (\iota_o|_{H_{ob}})$ die Abbildungsvorschrift und
- (3) $\mathcal{K}(op) = \mathcal{K}(p)$ die Bildmenge von ι_{op} .

BEWEIS.

- (1) $h \in \iota_o^{-1}(\mathcal{K}(o)_b) \Leftrightarrow o \setminus ho \in \mathcal{K}(o)_b \Leftrightarrow o \setminus hob = b \Leftrightarrow hob = ob \Leftrightarrow h \in H_{ob}$
- (2) $op\iota_{op}(h) = h\text{op} = o\iota_o(h)p = op\iota_p(\iota_o(h))$, zu lesen in P_μ .
- (3) folgt aus (1) und (2). \square



Sei zusätzlich $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(P)$ ein äquivariantes Prinzipalbündel und $o \in P$, so daß $P_\nu = R(o)$ die Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{N}(o)$ gemäß Satz 3.5 ist. Ferner sei α_ν dergestalt, daß $\mathcal{K}(o) \triangleleft \mathcal{N}(o) \xrightarrow{\alpha_\nu} \text{Aut}(P_\eta)$ ebenfalls ein äquivariantes Prinzipalbündel ist.

Proposition. Auch $H \triangleleft G \xrightarrow{\ell_\mu} \text{Aut}(P_\mu)$ ist ein äquivariantes Prinzipalbündel und für $p \in P_\eta$ stehen die Reduktionen $R_\eta(p)$ von P_η und $R_\mu(op)$ von P_μ in der Beziehung 3.8

$$R_\mu(op) = R(o) \times_{\mathcal{N}(o)} R_\eta(p).$$

BEWEIS. Daß H homogen auf B_μ operiert und alle $\mathcal{K}(m)$, $m \in P_\mu$, in \mathcal{S}_η konjugiert sind, überprüft man mit Hilfe von 3.3, 3.4 und Lemma 3.7. Wegen Lemma 3.7 (3) gilt nun für $r \in R$, $q \in P_\eta$:

$$rq \in R_\mu(op) \Leftrightarrow \mathcal{K}(q) = \mathcal{K}(rq) = \mathcal{K}(op) = \mathcal{K}(p) \Leftrightarrow q \in R_\eta(p). \quad \square$$

Äquivariante Vektorbündel

Sei $\xi = (E, \pi, B, O(F), \sigma, F, \mathfrak{A})$ ein differenzierbares riemannsches Vektorbündel (siehe B.1). Die typische Faser F ist ein euklidischer Vektorraum, $O(F)$ die Strukturgruppe

und σ die Standardoperation von $O(F)$ auf F . $\text{Aut}(\xi)$ ist die Gruppe der Bündelabbildungen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B, \end{array}$$

so daß f und \bar{f} Diffeomorphismen sind und f faserweise linear und isometrisch¹ ist.

Sei nun G eine kompakte Liegruppe, H ein Normalteiler von G und ρ eine Operation von G auf E durch solche Automorphismen. Wir erhalten äquivariante Mannigfaltigkeiten $H \triangleleft G \xrightarrow{\rho} \text{Diffeo}(E)$ und $H \triangleleft G \xrightarrow{\bar{\rho}} \text{Diffeo}(B)$ sowie für jedes $b \in B$ die orthogonale Darstellung $H_b \xrightarrow{\rho_b} O(E_b)$ der Standgruppe des Fußpunkts auf der Faser. Für jedes $e \in E_b$ bilden die Scheibendarstellungen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} H_e & = & H_e & \subset & H_b & & \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & (\spadesuit) \\ 0 & \longrightarrow & T_e E_b / T_e H_b e & \longrightarrow & T_e E / T_e H e & \longrightarrow & T_b B / T_b H b \longrightarrow 0. \end{array}$$

Der Nullschnitt $B \rightarrow E$, $b \mapsto 0_b$, dessen Bild 0_E ebenfalls Nullschnitt genannt wird, bedingt eine Äquivalenz der Darstellung $H_b \rightarrow \text{GL}(T_b B / T_b H b)$ zur Darstellung $H_{0_b} \rightarrow \text{GL}(T_{0_b} 0_E / T_{0_b} H 0_b)$ und für $e = 0_b$ eine kanonische Spaltung obiger Sequenz:

$$T_{0_b} E / T_{0_b} H 0_b = T_{0_b} E_b \oplus T_b B / T_b H b \quad \text{als } H_b\text{-Moduln.}$$

3.9 Definition. Ein Quadrupel (H, G, ρ, ξ) heie ein äquivariantes Vektorbündel, wenn G eine kompakte Liegruppe, H ein Normalteiler von G , ξ ein differenzierbares riemannsches Vektorbündel mit nichtleerer Basis und ρ ein stetiger Homomorphismus von G nach $\text{Aut}(\xi)$ ist, so daß der Nullschnitt ein Scheibentypenstratum der H -Operation auf dem Totalraum ist. Schreibe statt (H, G, ρ, ξ) auch $H \triangleleft G \xrightarrow{\rho} \text{Aut}(\xi)$ oder kürzer ρ oder E .

Seien $H \triangleleft G \xrightarrow{\rho} \text{Aut}(\xi)$ und $H' \triangleleft G' \xrightarrow{\rho'} \text{Aut}(\xi')$ äquivariante Vektorbündel. Sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha} & H' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\lambda} & G' \end{array}$$

¹„Monometrie“ steht in dieser Arbeit für „metrischer Morphismus“ und „Isometrie“ für „metrischer Isomorphismus“.

von Liegruppenmorphisimen und ein λ -äquivarianter Bündelmorphismus

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B', \end{array}$$

der faserweise linear und isometrisch ist, gegeben. f erhalte den Scheibentyp, d. h. $\forall t: f(E_t) \subset E'_t$. Dann heißt $(\varkappa, \lambda, f, \bar{f})$ ein Morphismus äquivarianter Vektorbündel. Schreibe statt $(\varkappa, \lambda, f, \bar{f})$ kurz f . Dies definiert die Kategorie Vb.

Lemma. Zu jedem äquivarianten Vektorbündel $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(E)$ gibt es genau einen Scheibentyp \mathfrak{s} , so daß gilt: **3.10**

- (1) $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(E)$ ist eine äquivariante Mannigfaltigkeit, ihr Scheibendiagramm ist $\text{St}_{\geq \mathfrak{s}}$, ihr tiefstes Stratum $E_{\mathfrak{s}}$ ist der Nullschnitt 0_E .
- (2) $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(B)$ ist eine äquivariante Mannigfaltigkeit, ihr Scheibendiagramm ist $\{\mathfrak{e}\}$.
- (3) Für $b \in B$ ist im $\varrho_b \rightarrow O(E_b)$ ein äquivarianter Vektorraum vom Scheibentyp \mathfrak{s} .
- (4) Für $t \in \text{St}$ ist $(E_t)_b = (E_b)_t$, d. h. Stratum- und Faserbildung vertauschen.
- (5) In $O(F)$ gibt es genau eine Konjugationsklasse (K) von Untergruppen, so daß $K \rightarrow O(F)$ ein äquivarianter Vektorraum vom Scheibentyp \mathfrak{s} ist.

BEWEIS. Nach Definition eines äquivarianten Vektorbündels gibt es \mathfrak{s} mit $E_{\mathfrak{s}} = 0_E$. Wegen $H_e \subset H_{\pi(e)}$ für $e \in E$ und Lemma 2.12 ist 0_E tiefer als jedes andere St-Stratum, also $\Delta(E) = \text{St}_{\geq \mathfrak{s}}$.

$T_{0_b} 0_E / T_{0_b} H 0_b$ ist gemäß Lemma 2.13 der triviale Summand der Scheibendarstellung im Punkte 0_b , folglich ist $\Delta(B) = \{\mathfrak{e}\}$. Die exakte Sequenz (\spadesuit) zeigt, daß die Scheibendarstellung der H_b -Mannigfaltigkeit E_b im Punkte e und die Scheibendarstellung der H -Mannigfaltigkeit E im Punkte e vom selben Typ sind. Für jeden Scheibentyp \mathfrak{t} ist daher $(E_b)_{\mathfrak{t}} = (E_{\mathfrak{t}})_b$, woraus $\Delta(E_b) = \Delta(E)$ folgt. E_b hat keinen trivialen Summanden: $E_{b, \text{triv.}} = (E_b)_{\mathfrak{s}} = (E_{\mathfrak{s}})_b = \{0_b\}$.

Wähle $b \in B$ und $f \in O(F, E_b)$ und setze $K := f^{-1} \circ \text{im } \varrho_b \circ f$. Für verschiedene Wahlen durchläuft K seine Konjugationsklasse. \square

Beziehung zu äquivarianten Vektorräumen

Sei $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ ein äquivariantes Vektorbündel. Das $O(F)$ -Prinzipalbündel von E ist $P := \text{Hom}(F, E)$. Dabei ist F als riemannsches Vektorbündel über einem Punkt $\{*\}$ aufzufassen und mit Hom sind die faserweise linearen und isometrischen Bündelabbildungen gemeint. $p \in P$ ist also eine lineare Isometrie $p: F \rightarrow E_b$, wobei b das Bild von $*$ unter \bar{p} ist. (Siehe B.3.) **3.11**

Gemäß Lemma 3.10 sind alle tatsächlichen Fasern und nach Wahl von $K < O(F)$

auch die typische Faser isomorphe äquivariante Vektorräume. Sei R die Menge der Bündelabbildungen von F nach E , die faserweise Vr-Morphismen sind, d. h. $r \in R_b$ ist eine Isometrie $r: F \rightarrow E_b$, so daß im $\varrho_b = r \circ K \circ r^{-1}$ ist.

3.12 Lemma. *R ist eine G -invariante Reduktion der Strukturgruppe auf $\text{Aut}(F)$, d. h. auf $\text{Nor}_{O(F)}(K)$. Die Reduktionen zu verschiedenen Wahlen von K bilden genau eine Konjugationsklasse.*

BEWEIS. Alle ϱ_b haben denselben Scheibentyp \mathfrak{s} . Da für jedes $p \in P$

$$\begin{array}{ccc} H_b \times F & \xrightarrow{\iota_p} & F \\ \parallel & \downarrow p & \downarrow p \\ H_b \times E_b & \xrightarrow{\varrho_b} & E_b \end{array}$$

eine Äquivalenz von Darstellungen ist, haben auch alle ι_p den Scheibentyp \mathfrak{s} , d. h. alle im ι_p sind in $O(F)$ konjugiert. Außerdem operiert H laut Lemma 3.10 homogen auf der Basis. Die Behauptung ist nun eine Anwendung des Satzes 3.5. \square

Sei $F' \rightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B'$ ein weiteres äquivariantes Vektorbündel, und zwar gelte $\Delta(E') = \Delta(E)$. Wähle $K' < O(F')$ gemäß Lemma 3.10 und einen Vr-Isomorphismus $\varphi: F \rightarrow F'$. P' und R' bezeichnen die P und R entsprechenden Größen von E' . Setze

$$\begin{array}{ccc} \varkappa: \text{Aut}(F) & \longrightarrow & \text{Aut}(F'). \\ k & \longmapsto & f \circ k \circ f^{-1} \end{array}$$

Dann entsprechen die Pb-Morphismen $g: P \rightarrow P'$ durch Einschränken umkehrbar eindeutig den Pb-Morphismen $h: R \rightarrow R'$ und diese via $f = h \times_{\varkappa} \varphi$ den Vb-Morphismen $f: E \rightarrow E'$. Einprägsamer formuliert heißt das:

3.13 Proposition. *Die äquivarianten Vektorbündel sind bis auf Isomorphie genau die zu einem äquivarianten Prinzipalbündel assoziierten Faserbündel mit einem äquivarianten Vektorraum als Faser:*

$$E = P \times_{O(F)} F = R \times_{\text{Aut}(F)} F,$$

und die Vb-Morphismen sind bis auf Isomorphie genau die zu einem Pb-Morphismus assoziierten Abbildungen:

$$h \times_{\text{id}_{\text{Aut}(F)}} \text{id}_F: R \times_{\text{Aut}(F)} F \longrightarrow R' \times_{\text{Aut}(F)} F.$$

VERTRÄGLICHKEIT MIT SCHACHTELUNG

3.14 Seien E, P, \mathfrak{s}, K und R wie in 3.11 gegeben, $\mathfrak{t} > \mathfrak{s}$ ein Scheibentyp und $L \rightarrow O(W)$ ein Repräsentant von \mathfrak{t} . Dann ist das Normalenbündel $NE_{\mathfrak{t}}$ des Stratum $E_{\mathfrak{t}}$ ein

geschachteltes Faserbündel (siehe Definition B.4):

- (1) $F_t \rightarrow E_t \rightarrow B$ ist das untere Bündel, genannt ξ . Es gilt $E_t \cong R \times_{\text{Aut}(F)} F_t$.
- (2) $NF_t \rightarrow NE_t \rightarrow B$ ist das äußere Bündel, genannt ν . Es gibt $NE_t \cong R \times_{\text{Aut}(F)} NF_t$.
- (3) $W \rightarrow NF_t \rightarrow F_t$ ist das innere Bündel, genannt η . η ist vermöge der $K \triangleleft \text{Aut}(F)$ -Operation ein äquivariantes Vektorbündel mit tiefstem Scheibentyp t . Die obige Wahl von L führt zur Reduktion der Strukturgruppe $NF_t \cong R_\eta \times_{\text{Aut}(W)} W$.
- (4) $W \rightarrow NE_t \rightarrow E_t$ ist das obere Bündel, genannt μ . μ ist vermöge der $H \triangleleft G$ -Operation ebenfalls ein äquivariantes Vektorbündel mit tiefstem Scheibentyp t , und L führt zur Reduktion der Strukturgruppe $NE_t \cong R_\mu \times_{\text{Aut}(W)} W$.

Während sich E wahlweise als $P \times_{O(F)} F$ oder als $R \times_{\text{Aut}(F)} F$ schreiben ließ, können ξ und ν nur noch als assoziiert zum $\text{Aut}(F)$ -Prinzipalbündel R aufgefaßt werden.

Lemma. $R_\mu \cong R \times_{\text{Aut}(F)} R_\eta$, folglich ist $NE_t \cong R \times_{\text{Aut}(F)} R_\eta \times_{\text{Aut}(W)} W$.

3.15

BEWEIS. Wende Proposition 3.8 auf obige Situation an. \square

Beziehung zu äquivarianten Mannigfaltigkeiten

Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit und \mathfrak{s} ein Scheibentyp. Das Normalenbündel $NM_\mathfrak{s} \rightarrow M_\mathfrak{s}$ des St-Stratums $M_\mathfrak{s}$ ist nach Wahl einer typischen Faser und einer riemannschen Metrik ein äquivariantes Vektorbündel $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(NM_\mathfrak{s})$, denn \mathfrak{s} ist der tiefste Scheibentyp von $NM_\mathfrak{s}$ und das Stratum $(NM_\mathfrak{s})_\mathfrak{s}$ ist gleich dem Nullschnitt. Verschiedene Wahlen führen offenbar zu isomorphen äquivarianten Vektorbündeln. Sei umgekehrt $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(E)$ ein äquivariantes Vektorbündel. Dann ist das Normalenbündel des Nullschnitts 0_E , d. h. des tiefsten Stratums, isomorph zu E (siehe 4.1). Damit ist gezeigt

Proposition. Die äquivarianten Vektorbündel sind bis auf Isomorphie genau die Normalenbündel der Scheibentypenstrata äquivarianter Mannigfaltigkeiten.

3.16

Im Sinne der Propositionen 3.13 und 3.16 sind die äquivariante Vektorbündel das Bindeglied zwischen äquivarianten Vektorräumen und äquivarianten Mannigfaltigkeiten.

§4 Tubensysteme

Tubenumgebungen

Sei $E \xrightarrow{\pi} X$ ein Vektorbündel. Die Faser des Vertikalbündels $VE := \ker T\pi$ über $e \in E$ ist der Tangentialraum $T_e E_{\pi(e)}$ in e an der Faser $E_{\pi(e)}$. Die Isomorphismen

4.1

$T_{e_1} E_{\pi e_1} \leftarrow E_{\pi e_1}, \frac{\partial}{\partial e_2} \Big|_{e_1} \leftarrow e_2$, fügen sich zum Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 VE & \cong & E \times_X E \\
 \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & & E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \frac{\partial}{\partial e_2} \Big|_{e_1} & \longleftarrow & (e_1, e_2) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & & e_1
 \end{array}$$

zusammen. Die Menge 0_E der Nullpunkte aller Fasern heißt ebenso wie die Abbildung $X \rightarrow E, x \mapsto 0_x$, der Nullschnitt des Vektorbündels. Letzterer führt zu der Zerlegung $TE|_{0_E} = VE|_{0_E} \oplus T0_E$, woraus die Isomorphismen $N0_E \cong VE|_{0_E} \cong E$ folgen. Ist speziell X eine Untermannigfaltigkeit und E ihr Normalenbündel, so folgt $N0_{NX} \cong NX$.

4.2 Sei nun X eine Untermannigfaltigkeit von M , $NX \xrightarrow{\nu} X$ das Normalenbündel von X in M und U eine offene Umgebung von 0_{NX} in NX . Eine offene Einbettung $\varphi: U \rightarrow M$ heißt eine Tubenabbildung, wenn

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & M \\
 \cup & & \cup \\
 0_{NX} & \xrightarrow{\cong} & X
 \end{array}$$

kommutiert und $NX \cong N0_{NX} \xrightarrow{N\varphi} NX$ die Identität ist. Ein Paar (φ, ϑ) aus einer Tubenabbildung φ und einer riemannsche Metrik ϑ auf NX heißt eine Tubenumgebung¹ von X in M . Statt (φ, ϑ) schreibe ich meist wieder φ .

Der Zweck von Tubenumgebungen ist es, sich von der umgebenden Mannigfaltigkeit zu befreien und statt dessen mit einem Vektorbündel zu arbeiten. Die riemannsche Metrik benötige ich, um später orthogonale Scheibendarstellungen zu erhalten.

Sei $(\varphi: U \rightarrow M, \vartheta)$ eine Tubenumgebung von X in M , M' eine Mannigfaltigkeit und $f: \varphi(U) \rightarrow M'$ eine offene Einbettung. Dann ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von M' , $Nf: NX \rightarrow Nf(X)$ ein Isomorphismus, $f \circ \varphi \circ (Nf)^{-1}: Nf(X) \rightarrow M'$ eine Tubenabbildung und $f_*\vartheta$ eine riemannsche Metrik auf $Nf(X)$. Die so definierte Tubenumgebung $f_*(\varphi, \vartheta)$ heiße die mittels f übertragene Tubenumgebung von $f(X)$ in M' .

„ $T(U) :=$ Menge der Tubenumgebungen von U in M “ für $U \underset{\text{offen}}{\subset} X$ definiert eine mengenwertige Prägarbe T auf X . Setzt man wie üblich

$$T(A) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ A \subset U \underset{\text{offen}}{\subset} X}} T(U),$$

sind dadurch Tubenumgebungen für beliebige Teilmengen einer vorgegebenen Untermannigfaltigkeit, nämlich als Keime, sowie das Einschränken von Tubenumgebungen auf beliebige Teilmengen definiert. Die Einschränkung einer Tubenumgebung φ auf

¹eigentlich „Röhrenumgebung“

eine Teilmenge A von X bezeichne ich nie mit $\varphi|_A$, sondern mit $\text{res}_A(\varphi)$. „eine Tubenumgebung auf A “ bedeutet für nichtoffenes A stets „der Keim in A einer Tubenumgebung“.

Zum bequemeren „lokalen“ Arbeiten sei für Funktionen, Tuben und ähnliches vereinbart:

- (1) Zwischen Keimen und deren Repräsentanten braucht ab gleich nicht mehr unterschieden zu werden.
- (2) „nahe“ heißt „in irgendeiner Umgebung von“.
- (3) $f: M \supset \rightarrow M'$ heißt $f: U \rightarrow M'$ mit $U \subset M$.

Zwei Tubenabbildungen $\varphi: U \rightarrow M$ und $\psi: V \rightarrow M$ von X in M heißen äquivalent, wenn sie nahe 0_{NX} gleich sind. Eine Äquivalenzklasse zusammen mit einer riemannschen Metrik des Normalenbündels heißt eine Tube von X in M . 4.3

Ist $([\varphi], \vartheta)$ eine Tube von X in M und $f: M \supset \rightarrow M'$ eine nahe X definierte offene Einbettung, so definiere die übertragene Tube $f_*([\varphi], \vartheta)$ als Äquivalenzklasse der Übertragung eines geeigneten Repräsentanten. Ist statt f $g: M' \supset \rightarrow M$ gegeben, so daß g^{-1} nahe X existiert und eine offene Einbettung ist, so schreibe für die mittels g^{-1} übertragene Tube auch $g^*([\varphi], \vartheta)$ statt $g^{-1}_*([\varphi], \vartheta)$. 4.4

Die Tuben bilden sogar eine Garbe \mathcal{T} auf X . $[[\varphi]] \in \mathcal{T}(A)$ ist Keim einer Tube $[\varphi] \in \mathcal{T}(U)$, $U \underset{\text{Umgebung}}{\supset} A$ geeignet, welche ihrerseits Keim einer Tubenumgebung $\varphi \in T(U)$ ist. Dies wissend braucht zwischen φ , $[\varphi]$ und $[[\varphi]]$ kaum noch unterschieden zu werden. Die Aussagen dieses Paragraphen über Fortsetzbarkeit von Tuben, Tubensystemen und — in §8 — Isotopien derselben implizieren die Weichheit der jeweiligen Garbe. 4.5

EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT VON TUBEN

Eine differenzierbare Abbildung $h: I \times M \rightarrow M$ heißt eine Diffeotopie von M , wenn $h_0 = \text{id}_M$ und für jedes t die Abbildung h_t ein Diffeomorphismus ist. Der Träger einer Diffeotopie ist definiert als $\text{supp}(h) := \text{cl}(\{x \in M \mid \exists t \in I: h_t(x) \neq x\})$.

Eine Tubenabbildung φ heißt verträglich mit einer Abbildung $f: M \rightarrow P$, wenn $f \circ \varphi = f \circ \pi$ nahe 0_{NX} gilt. Den Sinn dieser Definition erhellt Definition 7.2.

Die weitreichenden Aussagen von [Lellmann] können nun inhaltlich vollständig wiedergegeben werden:

Starker Isotopiesatz für Tuben. Sei G eine kompakte Liegruppe, $f: M \rightarrow P$ eine äquivariante, differenzierbare Abbildung von G -Mannigfaltigkeiten, X eine abgeschlossene, invariante Untermannigfaltigkeit von M , so daß $f|_X: X \rightarrow P$ submersiv ist; seien φ und ψ äquivariante, mit f verträgliche Tuben von X in M und A eine invariante, abgeschlossene Teilmenge von X mit $\varphi = \psi$ nahe A ; sei V' eine invariante, abgeschlossene Teilmenge von X und V eine invariante, in M offene Obermenge von V' ; sei $N \subset M \times M$ eine unter der Diagonaloperation von G auf $M \times M$ invariante Umgebung der Diagonale. Dann existiert eine äquivariante, mit f verträgliche, X punktweise 4.6

festlassende Diffeotopie $h: I \times M \rightarrow M$, so daß

- (1) $(h_1)_*\varphi = \psi$ nahe $A \cup V'$,
- (2) $\text{supp}(h) \subset V$,
- (3) $(h_t(x), x) \in N$ für alle $t \in I$, $x \in M$.

BEWEIS. [Lellmann], S. 6–15. \square

4.7 Starker Existenzsatz für Tuben. Sei G eine kompakte Liegruppe, $f: M \rightarrow P$ eine äquivariante, differenzierbare Abbildung von G -Mannigfaltigkeiten, X eine invariante Untermannigfaltigkeit von M , so daß $f|_X: X \rightarrow P$ submersiv ist; sei A eine invariante, abgeschlossene Teilmenge von X und φ eine nahe A definierte, mit f verträgliche, äquivariante Tube von X in M . Dann existiert eine äquivariante, mit f verträgliche Tube ψ von X in M mit $\psi = \varphi$ nahe A .

BEWEIS. [Lellmann], S. 16–18. \square

Tubensysteme

FAMILIEN

Eine Familie φ besteht aus einer Indexmenge I und einer Vorschrift, die jedem $i \in I$ ein mathematisches Objekt — d. h. eine Menge — φ_i zuordnet. Schreibe für φ auch $(\varphi_i)_{i \in I}$. Zwei Familien $(\varphi_i)_{i \in I}$ und $(\psi_j)_{j \in J}$ heißen gleich, wenn I und J gleich (oder kanonisch isomorph) sind und $\forall i \in I: \varphi_i = \psi_i$ gilt. Die eindeutig existierende Familie mit leerer Indexmenge heiße die leere Familie.

FAMILIEN VON TUBEN

4.8 Sei \mathbf{S} eine Stratifizierung einer Mannigfaltigkeit M . Eine Familie $(\psi_X)_{X \in \mathbf{S}}$ heißt eine Familie von Tuben zur Stratifizierung \mathbf{S} , wenn für jedes $X \in \mathbf{S}$ ψ_X eine Tube von X in M ist. Wie in 4.5 bilden die Familien von Tuben zu einer festen Stratifizierung \mathbf{S} eine Garbe auf M , wodurch Restriktionen und Keime solcher Familien definiert sind. Ist weiter \mathbf{S}' eine Stratifizierung einer Mannigfaltigkeit M' , A eine Teilmenge von M und $M \supset \xrightarrow{f} M'$ der Keim in A einer offenen Einbettung, die Strata in Strata abbildet, so überträgt f den Keim in A einer Familie von Tuben zur Stratifizierung \mathbf{S} in den Keim in $f(A)$ einer Familie von Tuben zur Stratifizierung \mathbf{S}' durch Übertragen der Keime der einzelnen Tuben gemäß 4.4.

OBJEKTE UND SORTEN VON OBJEKTEN

Y heißt ein Objekt, wenn Y ein äquivarianter Vektorraum, ein Scheibentyp, ein Scheibendiagramm, ein äquivariantes Vektorbündel oder eine äquivariante Mannigfaltigkeit ist. Ob steht für Vr, St, Sd, Vb oder Mf; Vr, St, Sd, Vb bzw. Mf heißt die Sorte des Objekts.

KURZE OBJEKTE

Die Objekte der Längen 0 und 1 sind leicht beschrieben:

Länge 0: Äquivariante Vektorräume, Scheibentypen und äquivariante Vektorbündel gibt es nicht. Das einzige Scheibendiagramm ist \emptyset . Die Trägermengen der äquivarianten Mannigfaltigkeiten sind leer, die Operationen daher zutiefst trivial.

Länge 1: Der bis auf die Namen der Elemente einzige äquivariante Vektorraum ist $\{1\} \rightarrow O(\{0\})$, seine Isomorphieklasse der einzige Scheibentyp ϵ , das einzige Scheibendiagramm $\{\epsilon\}$. Die äquivarianten Vektorbündel haben Rang 0, die Operationen auf ihnen wie auf den äquivarianten Mannigfaltigkeiten sind homogen.

ZWEISPALTIGE OB-MATRIZEN

Für die fünf Sorten von Objekten definiere ich den Begriff einer Ob-Matrix durch Rekursion über ihre Länge: 4.9

Rekursionsanfang: $(\Delta \ \varphi)$ heie eine Sd-Matrix der Länge 0, wenn Δ das leere Scheibendiagramm und φ die leere Familie ist. $\begin{pmatrix} M & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ heie eine Mf-Matrix der Länge 0, wenn außerdem M eine äquivariante Mannigfaltigkeit mit leerer Trägermenge und ψ die leere Familie ist.

Rekursionsschritt: Seien Sd- und Mf-Matrizen der Länge k für $0 \leq k \leq l - 1$ sowie Vr-, St- und Vb-Matrizen der Länge k für $1 \leq k \leq l - 1$ bereits definiert.

Seien ein äquivarianter Vektorraum $K \rightarrow O(V)$ der Länge l und eine Mf-Matrix $\begin{pmatrix} S(V) & \chi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ der Länge $l - 1$ gegeben, wobei die Einheitssphäre $S(V)$ gemäß 2.4 als äquivariante Mannigfaltigkeit aufgefaßt wird. Der Isomorphismus 4.10

$$\begin{aligned} V \setminus 0 &\cong \mathbb{R}_{>0} \times S(V) \\ rv &\longleftarrow (r, v) \end{aligned}$$

liefert Tuben $\psi_{\mathfrak{s}} := \text{id}_{\mathbb{R}_{>0}} \times \chi_{\mathfrak{s}}$ der Scheibentypenstrata von $V \setminus 0$. Sei $\psi_{[V]}$ die kanonische Tube von $\{0\}$ in V , bestehend aus dem Keim in 0 des kanonischen Isomorphismus $T_0 V \cong V$ und dem dadurch auf $T_0 V$ definierten Skalarprodukt. Dann ist $\psi := (\psi_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \geq [V]}$ eine Tubenfamilie zur Scheibentypenstratifizierung von V . Nenne nun $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix der Länge l .

Seien eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi)$ der Länge $l - 1$, ein Scheibentyp \mathfrak{s} mit $\text{St}_{>\mathfrak{s}} = \Delta$ und eine Familie $(\psi^V)_{V \in \mathfrak{s}}$ gegeben. Für jedes $V \in \mathfrak{s}$ sei $\begin{pmatrix} V & \psi^V \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix der Länge l und jeder Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ mit $V, W \in \mathfrak{s}$ überführe ψ^V in ψ^W . Dann heißt $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine St-Matrix der Länge l . 4.11

Seien ein Scheibendiagramm Δ der Länge l und eine Familie $(\psi^{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ gegeben. Für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$ sei $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi^{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{>\mathfrak{s}} & (\psi^t)_{t > \mathfrak{s}} \end{pmatrix}$ eine St-Matrix der Länge $l(\mathfrak{s})$. Dann heißt $(\Delta \ \psi)$ eine Sd-Matrix der Länge l . 4.12

Seien eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi)$ der Länge l und ein äquivariantes Vektorbündel E mit 4.13

$\Delta(E) = \Delta$ gegeben. F sei die typische Faser von E und \mathfrak{s} der Fuß von Δ . Die Wahl von $K < O(F)$ gemäß Lemma 3.10 macht F zu einem äquivarianten Vektorraum vom Scheibentyp \mathfrak{s} . φ enthält $\varphi^{\mathfrak{s}}$, $\varphi^{\mathfrak{s}}$ enthält seinerseits die Familie φ^F . Zum anderen ermöglicht K die Reduktion R der Strukturgruppe von E auf $\text{Aut}(F)$ gemäß Lemma 3.12. Für $t \geq \mathfrak{s}$ ist wegen $NE_t \cong R \times_{\text{Aut}(F)} NF_t$ (siehe 3.14) durch $\psi_t := \text{id}_R \times_{\text{Aut}(F)} \varphi^F$ eine Tube des Scheibentypenstratums NE_t in E definiert. ψ_t hängt nicht von der Wahl von K ab. $\begin{pmatrix} E & (\psi_t)_{t \in \Delta} \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ heißt nun eine Vb-Matrix der Länge l .

4.14 Seien eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi)$ der Länge l , eine äquivariante Mannigfaltigkeit M mit $\Delta(M) = \Delta$ und eine Familie $(\psi_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ von Tuben zur Scheibentypenstratifizierung von M gegeben. Für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$ existiert genau eine Familie $\chi^{\mathfrak{s}}$, so daß $\begin{pmatrix} NM_{\mathfrak{s}} & \chi^{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{\geq \mathfrak{s}} & (\varphi^t)_{t \geq \mathfrak{s}} \end{pmatrix}$ eine Vb-Matrix ist. Die Tubenabbildung $\psi_{\mathfrak{s}}: NM_{\mathfrak{s}} \supset \rightarrow M$ ist der Keim im Nullschnitt einer offenen Einbettung. $\psi_{\mathfrak{s}}$ übertrage $\text{res}_{0_{NM_{\mathfrak{s}}}}(\chi^{\mathfrak{s}})$ in $\text{res}_{M_{\mathfrak{s}}}(\psi)$. Dann heißt $\begin{pmatrix} M & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine Mf-Matrix der Länge l .

Damit ist die Rekursion beendet.

Bisher ist die Besetzung einer Sd-Matrix stets $(\bullet \ \bullet)$, die Besetzung einer Ob-Matrix mit $\text{Ob} \neq \text{Sd}$ stets $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$. Definiere nun für $\text{Ob} \neq \text{Sd}$: $\begin{pmatrix} Y & \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ heißt eine Ob-Matrix der Besetzung $\begin{pmatrix} \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$, wenn $(\Delta \ \varphi)$ eine Sd-Matrix und $Y \in \text{Ob}$ ist, so daß $\Delta := \Delta(Y)$, falls $\text{Ob} = \text{Vb}$ oder $\text{Ob} = \text{Mf}$, bzw. $\Delta := (\Delta(Y) \setminus \text{Fuß}) = \text{St}_{>Y}$, falls $\text{Ob} = \text{Vr}$ oder $\text{Ob} = \text{St}$. Definiere ebenfalls für $Y \in \text{Ob} \neq \text{Sd}$: $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ heißt eine Ob-Matrix der Besetzung $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$, wenn Δ und φ existieren, so daß $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine Ob-Matrix ist.

TUBENSYSTEME

Statt „ $(\Delta \ \varphi)$ ist eine Sd-Matrix“ sage ich auch „ φ ist ein Tubensystem von Δ “. Statt „ $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ ist eine Ob-Matrix“, $\text{Ob} \neq \text{Sd}$, sage ich auch „ ψ ist ein Tubensystem auf $\begin{pmatrix} Y & \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ “ oder „ ψ ist ein Tubensystem von Y über $(\Delta \ \varphi)$ “. Statt „ $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ ist eine Ob-Matrix“ sage ich auch „ ψ ist ein Tubensystem von Y “. Man beachte den Bedeutungsunterschied zwischen „Tubensystem“ und „Familie von Tuben“.

4.15 KURZE TUBENSYSTEME

Jedes Objekt der Länge 0 oder 1 besitzt genau ein Tubensystem. Ein äquivarianter Vektorraum, Scheibentyp, Scheibendiagramm oder äquivariantes Vektorbündel der Länge 2 besitzt genau ein Tubensystem, da das Hauptstratum als offene Teilmenge genau eine Tube besitzt und die Tube des tiefsten Stratums in der Definition vorgeschrieben wird. Andererseits ist jede Familie von Tuben zur Scheibentypenstratifizierung

zung einer äquivarianten Mannigfaltigkeit der Länge 2 ein Tubensystem.

BEMERKUNGEN

4.16

(1) Ein Vr-Tubensystem ψ läßt sich aus seinem Keim $\text{res}_{\{0\}}(\psi)$ im Nullpunkt rekonstruieren. Zwischen Keimen im Nullpunkt und den „ausgewachsenen“ Tubensystemen braucht daher nicht unterschieden zu werden. Gleiches gilt für Vb-Tubensysteme und ihre Keime im Nullschnitt.

(2) Sei V ein äquivarianter Vektorraum vom Scheibentyp \mathfrak{s} und φ ein Tubensystem von $\text{St}_{>\mathfrak{s}}$. Die Tubensysteme χ von V über φ entsprechen umkehrbar eindeutig den Tubensystemen ψ von \mathfrak{s} über φ : Setze für $W \in \mathfrak{s}$ $\psi^W := f_*(\chi)$, wobei f ein beliebiger Isomorphismus von V nach W sei. Wegen der $\text{Aut}(V)$ -Äquivarianz von χ ist ψ^W wohldefiniert. Setze umgekehrt $\chi := \psi^V$.

(3) Eine Sd-Matrix ist stets einzeilig, da bereits die Halbordnung des Scheibendiagramms der rekursiven Natur des Tubensystems Rechnung trägt. Ein Sd-Tubensystem ist kein Tubensystem über einem anderen, sondern ein Tubensystem per se.

(4) Mit den Bezeichnungen aus der Definition 4.14 der Mf-Matrizen überträgt $(\psi_{\mathfrak{s}})^{-1}$ den Keim $\text{res}_{M_{\mathfrak{s}}}(\psi)$ eines Tubensystems einer äquivarianten Mannigfaltigkeit in den Keim $\text{res}_{0_{NM_{\mathfrak{s}}}}(\chi^{\mathfrak{s}})$ eines Tubensystems eines äquivarianten Vektorraums. Dieser Übergang heie der Normalenabstieg von ψ über das \mathfrak{s} -Stratum; vgl. (A3) in Definition II 3.6. Er ist in den Beweisen von Lemma 4.18 und Satz 7.7 entscheidend.

(5) Am Beispiel der äquivarianten Mannigfaltigkeiten soll gezeigt werden, daß sich Tubensysteme auch rekursionsfrei definieren ließen: Sei ψ eine Familie von Tuben zur St-Stratifizierung einer äquivarianten Mannigfaltigkeit M . Sei $\mathfrak{s} \in \Delta(M)$. $\psi_{\mathfrak{s}}^*(\psi)$ sei der Keim einer — dadurch eindeutig bestimmten — Tubenfamilie χ zur St-Stratifizierung von $NM_{\mathfrak{s}}$, so daß gilt: χ respektiert die Fasern (siehe Definition II 3.3), die Tube $\chi_{\mathfrak{s}}: N0_{NM_{\mathfrak{s}}} \supset \rightarrow NM_{\mathfrak{s}}$ ist der kanonische Isomorphismus und für $\mathfrak{t} > \mathfrak{s}$ ist die Tube $\chi_{\mathfrak{t}}: \mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant. Dann ist für $x \in M_{\mathfrak{s}}$ die Faser $N_x M_{\mathfrak{s}}$ ein euklidischer Vektorraum mit einer Tubenfamilie χ_x . Das Bild der Standgruppe H_x in $\text{GL}(N_x M_{\mathfrak{s}})$ operiert effektiv, orthogonal, ohne trivialen Summanden und respektiert χ_x . Sind diese äquivarianten Vektorräume mit Tubenfamilie $(N_x M_{\mathfrak{s}}, \chi_x)$ für alle $x \in M_{\mathfrak{s}}$ isomorph, und gilt dies für alle $\mathfrak{s} \in \Delta(M)$, so heißt ψ ein Tubensystem der äquivarianten Mannigfaltigkeit M .

(6) Aus (5) wird deutlich, daß es zu einem Objekt Y der Sorte $\text{Ob} \neq \text{Sd}$ und einer Familie ψ höchstens eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi)$ gibt, so daß $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ eine Ob-Matrix ist.

MORPHISMEN VON OBJEKTEN MIT TUBENSYSTEMEN

Die Morphismen von mit Tubensystemen ausgestatteten Objekten sollen grob gesprochen diejenigen Morphismen der Objekte sein, die die Tubensysteme ineinander überführen:

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt ein (Vr,Ts)-Morphismus von $(V \ \varphi)$ nach $(W \ \psi)$, wenn f ein Vr-Morphismus und $f_*(\varphi) = \psi$ ist. Sind V, W, ψ und f gegeben, gibt es

genau ein φ , nämlich $\varphi = f^*(\psi)$, so daß f ein (Vr,Ts)-Morphismus wird. Wie schon die Vr-Morphismen sind auch alle (Vr,Ts)-Morphismen Isomorphismen.

Eine Abbildung $f: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{t}$ heißt (St,Ts)-Morphismus von (\mathfrak{s}, φ) nach (\mathfrak{t}, ψ) , wenn $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$, $f = \text{id}_{\mathfrak{s}}$ und $\psi = \varphi$ gilt.

Eine Abbildung $f: \Gamma \rightarrow \Delta$ heißt (Sd,Ts)-Morphismus von (Γ, φ) nach (Δ, ψ) , wenn $\Gamma \subset \Delta$, f die Inklusion und $\varphi = \psi|_{\Gamma}$ ist.

Eine Abbildung $f: E \rightarrow E'$ — eigentlich ein Tupel $(\varkappa, \lambda, f, \bar{f})$ wie in Definition 3.9 — heißt ein (Vb,Ts)-Morphismus von (E, ψ) nach (E', ψ') , wenn f ein Vb-Morphismus ist, und faserweise $f_{b*}(\psi_b) = \psi'_{\bar{f}(b)}$ gilt. Sind E, E', ψ' und f gegeben, gibt es genau ein ψ , so daß f ein (Vr,Ts)-Morphismus ist. E ist der Rückzug $f^*(E')$ von E' und ψ ist der in offensichtlicher Weise definierte Rückzug $f^*(\psi')$ von ψ' . Ist f ein Diffeomorphismus, so kann man f^* auch als die Übertragung von Tubensystemen mittels f^{-1} lesen. Wie schon die Vb-Morphismen sind auch alle (Vb,Ts)-Morphismen faserweise Isomorphismen.

Seien $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ und $H' \triangleleft G' \rightarrow \text{Diffeo}(M')$ äquivariante Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: M \rightarrow M'$ zusammen mit einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varkappa} & H' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\lambda} & G' \end{array} \quad (\natural)$$

von Liegruppennormorphismen heißt ein (Mf,Ts)-Morphismus von (M, ψ) nach (M', ψ') , wenn gilt: f ist differenzierbar und λ -äquivariant, für $\mathfrak{s} \in \Delta(M)$ ist $f(M_{\mathfrak{s}}) \subset M'_{\mathfrak{s}}$, Nf ist ein (Vb,Ts)-Morphismus von $(NM_{\mathfrak{s}}, \psi_{\mathfrak{s}}^*(\psi))$ nach $(NM'_{\mathfrak{s}}, \psi'_{\mathfrak{s}}^*(\psi'))$ und

$$\begin{array}{ccc} NM_{\mathfrak{s}} & \xrightarrow{Nf} & NM'_{\mathfrak{s}} \\ \cup & & \cup \\ \psi_{\mathfrak{s}} \downarrow & & \downarrow \psi'_{\mathfrak{s}} \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array} \quad (\flat)$$

kommutiert nahe dem Nullschnitt $0_{NM_{\mathfrak{s}}}$.

4.17

Nun endlich können Mf-Morphismen definiert werden: Eine Abbildung $f: M \rightarrow M'$ zusammen mit einem kommutativen Diagramm (\natural) heißt ein Mf-Morphismus, wenn es zu jedem Tubensystem ψ' von M' ein Tubensystem ψ von M gibt, so daß f ein (Mf,Ts)-Morphismus wird.

Ist $\varkappa = \text{id}_H$, $\lambda = \text{id}_G$ und f eine offene Einbettung, so ist f ein Mf-Morphismus. Zu gegebenem Tubensystem ψ' von M' wählt man ψ als $\text{res}_M(\psi')$.

Grob gesprochen ist eine äquivariante, differenzierbare Abbildung, die den Scheibentyp erhält, ein Mf-Morphismus, wenn sie längs den Strata keine „Falten“ hat. Statt dies zu präzisieren, begnüge ich mich mit den offenen Einbettungen als Beispielen von

Mf-Morphismen sowie einem hoffentlich instruktiven Gegenbeispiel:

Setze $M := \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ und betrachte die Operation

$$\begin{aligned} S^1 \times M &\longrightarrow M. \\ (a, (r, z)) &\longmapsto (r, az) \end{aligned}$$

$S^1 \triangleleft S^1 \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ ist eine äquivariante Mannigfaltigkeit. $\mathbb{R} \times 0$ ist die Fixpunktmenge, der Rest ist das Hauptstratum. Fasse $M \xrightarrow{\text{Pr}_1} \mathbb{R}$ als das Normalenbündel der Fixpunktmenge auf. Dann bilden id_M und die eindeutig existierende Tube des Hauptstratums ein Tubensystem. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f: M &\longrightarrow M. \\ (r, z) &\longmapsto (r(r^2 - |z|^4), z) \end{aligned}$$

f ist S^1 -äquivariant, differenzierbar, erhält den Scheibentyp und überführt das gewählte Tubensystem in sich, denn das Normal Nf von f an der Fixpunktmenge ist die Identität $\text{id}_{\mathbb{R} \times \mathbb{C}}$. Aber (b) kommutiert nicht, denn f ist in keiner Umgebung von $\mathbb{R} \times 0$ injektiv.

Die Definition der Mf-Morphismen erfüllt folgende Zwecke:

- (1) Mf ist mit diesen Morphismen eine Kategorie.
- (2) Der Vergißfunktorkomplex von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit Tubensystemen nach Mf existiert.
- (3) Die Inklusionsabbildungen offener Teilmengen sind Mf-Morphismen.

Die enge und etwas technische Definition nehme ich in Kauf, zumal die (Mf, Ts)-Morphismen eine weit wichtigere Rolle spielen.

Existenz von Tubensystemen

Lemma.

4.18

- (Vr) Über jedem Tubensystem von $\text{St}_{>[V]}$ liegt ein Tubensystem des äquivarianten Vektorraums V .
- (St) Über jedem Tubensystem von $\text{St}_{>s}$ liegt ein Tubensystem des Scheibentyps s .
- (Sd) Jedes Tubensystem φ eines Scheibendiagramms Γ läßt sich zu einem Tubensystem eines Γ umfassenden Scheibendiagramms Δ fortsetzen.
- (Vb) Über jedem Tubensystem von $\Delta(E)$ liegt genau ein Tubensystem des äquivarianten Vektorbündels E .
- (Mf) Sei φ ein Tubensystem von $\Delta(M)$, A eine abgeschlossene Teilmenge von M und ψ^A der Keim in A eines Tubensystems über φ . Dann existiert eine Fortsetzung ψ^M von ψ^A auf M über φ .

DER BEWEIS erfolgt durch Induktion über die Länge l des jeweiligen Scheibendiagramms. Vergleiche für den Induktionsanfang 4.15. Auszuführen bleibt der Induktions-schluss.

Zu (Vr): Sei $K \rightarrow O(V)$ ein äquivarianter Vektorraum der Länge l und φ ein Tubensystem des Scheibendiagramms $St_{>[V]}$. Nach Induktionsannahme existiert ein Tubensystem der äquivarianten Mannigfaltigkeit $K \triangleleft \text{Aut}(V) \rightarrow \text{Diffeo}(S(V))$ über φ . Dieses liefert nach Definition der Vr-Tubensysteme ein Tubensystem des äquivarianten Vektorraums V .

(St) folgt aus (Vr), da gemäß Bemerkung (2) in 4.16 Tubensysteme von äquivarianten Vektorräumen und Scheibentypen einander umkehrbar eindeutig entsprechen.

Zu (Sd): Seien φ, Γ, Δ gegeben und $l(\Delta) = l$. Setze $(\varphi_s)_{s \in \Gamma, l(s) < l}$ nach Induktionsannahme zu $(\psi_s)_{s \in \Delta, l(s) < l}$ fort. Setze $\psi_s := \varphi_s$ für $s \in \Gamma$ mit $l(s) = l$. Wähle gemäß (St) für jedes $s \in \Delta \setminus \Gamma$ mit $l(s) = l$ ein Tubensystem ψ_s über $(\psi_t)_{t > s}$. Damit ist $(\psi_s)_{s \in \Delta}$ ein φ fortsetzendes Tubensystem von Δ .

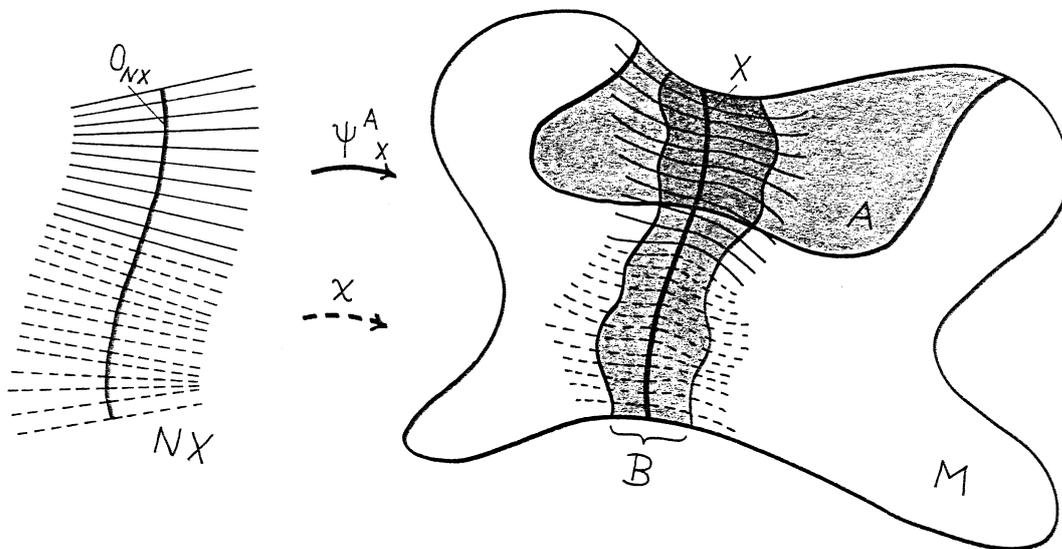
(Vb) folgt sofort aus der Definition 4.13.

Zu (Mf): M ist als Mannigfaltigkeit ein normaler topologischer Raum, weshalb die Strata maximaler Tiefe paarweise disjunkte Umgebungen besitzen. Daher kann die folgende Konstruktion für jedes dieser Strata einzeln durchgeführt werden. Nur ein einziges Stratum X maximaler Tiefe anzunehmen, beschränkt deshalb nicht die Allgemeinheit.

Nach Satz 4.7 existiert eine Tube χ von X in M , so daß

$$\text{res}_{A \cap X}(\chi) = \text{res}_{A \cap X}(\psi^A_X) \tag{\#}$$

gilt. Nach (Vb) existiert genau ein Tubensystem v auf NX über φ . Wegen der Eindeutigkeit von v , des Normalenabstiegs bei ψ^A und (\#) gibt es eine abgeschlossene Umgebung B von X in M , so daß $\text{res}_{A \cap B}(\chi_*(v)) = \text{res}_{A \cap B}(\psi^A)$.



Zeichnung 3: Die Tube des tiefsten Stratums

Definiere auf $A \cup B$ ein Tubensystem $\psi^{A \cup B}$ durch $\text{res}_A(\psi^{A \cup B}) = \psi^A$ und $\text{res}_B(\psi^{A \cup B})$

$= \text{res}_B(\chi_*(v))$. Nach Induktionsannahme existiert ein Tubensystem $\psi^{M \setminus X}$ auf $M \setminus X$ über φ mit $\text{res}_{A \cup B \setminus X}(\psi^{M \setminus X}) = \text{res}_{A \cup B \setminus X}(\psi^{A \cup B})$. Dann ist $\psi^M := \psi^{M \setminus X} \cup \{\chi\}$ ein Tubensystem auf M über φ mit $\text{res}_A(\psi^M) = \psi^A$ wie gewünscht. \square

Korollar. *Jedes Objekt besitzt ein Tubensystem.*

4.19

BEWEIS. Lemma 4.18 \square

§5 Quotienten äquivarianter Vektorräume

Quotientenstrukturen

Sei eine Menge X vermöge der Abbildungen $+: X \times X \rightarrow X$, $\cdot: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein euklidischer Vektorraum. Dann heie das Tripel $\mathcal{V} = (+, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine euklidische Struktur auf X .

DREISPALTIGE OB-MATRIZEN

5.1

Für die fünf Sorten von Objekten definiere ich den Begriff einer — jetzt dreispaltigen — Ob-Matrix durch Rekursion über ihre Länge:

Rekursionsanfang: $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ heie eine Sd-Matrix der Länge 0, wenn $(\Delta \ \varphi)$ eine Sd-Matrix der Länge 0 und \mathcal{V} die leere Familie ist. $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ heie eine Mf-Matrix der Länge 0, wenn außerdem M eine äquivariante Mannigfaltigkeit mit leerer Trägermenge und \mathcal{D} die Garbe der reellwertigen Funktionen auf $H \setminus M = \emptyset$ ist.

Rekursionsschritt: Seien Sd- und Mf-Matrizen der Länge k für $0 \leq k \leq l - 1$ sowie Vr-, St- und Vb-Matrizen der Länge k für $1 \leq k \leq l - 1$ bereits definiert.

Sei eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{W})$ der Länge $l - 1$, ein quivarianter Vektorraum $K \rightarrow O(V)$ mit $\text{St}_{>[V]} = \Delta$ und ein Tubensystem ψ von V über φ gegeben. Dann ist $\text{res}_{S(V)}(\psi)$ ein Tubensystem der Sphäre $S(V)$. Sei \mathcal{D} eine differenzierbare Struktur auf $K \setminus S(V)$, so daß $\begin{pmatrix} S(V) & \text{res}_{S(V)}(\psi) & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine Mf-Matrix der Länge $l - 1$ ist — laut Satz 7.7 gibt es genau ein solches \mathcal{D} . Wähle, falls möglich, eine riemannsche Metrik ϑ auf $(K \setminus S(V), \mathcal{D})$, durch die $K \setminus S(V)$ zu einer runden Sphäre vom (dimensionsabhngigen) Einheitsvolumen mit orthogonaler $\text{Aut}(V)/K$ -Operation wird. $K \setminus V$ ist kanonisch isomorph zum offenen Kegel über $K \setminus S(V)$:

5.2

$$K \setminus V \cong \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times (K \setminus S(V))}{\{0\} \times (K \setminus S(V))}$$

$$K(rv) \longleftarrow [(r, Kv)]$$

ϑ bestimmt vermöge dieses Isomorphismus eine euklidische Struktur \mathcal{V} auf $K \setminus V$.

Nenne nun $\begin{pmatrix} V & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix der Länge l .

5.3 Sei eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{W})$ der Länge $l - 1$, ein Scheibentyp \mathfrak{s} mit $\text{St}_{>\mathfrak{s}} = \Delta$, ein Tubensystem ψ von \mathfrak{s} über φ und eine Familie $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^V)_{V \in \mathfrak{s}}$ gegeben. Für $V \in \mathfrak{s}$ sei $\begin{pmatrix} V & \psi^V & \mathcal{V}^V \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix und für je zwei $V, V' \in \mathfrak{s}$ überführe jeder Vr-Morphismus von V nach V' \mathcal{V}^V in $\mathcal{V}^{V'}$. Dann heißt $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine St-Matrix der Länge l .

5.4 Sei ein Scheibendiagramm Δ der Länge l , ein Tubensystem φ von Δ und eine Familie $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ gegeben. Für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$ sei $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi^{\mathfrak{s}} & \mathcal{V}^{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{>\mathfrak{s}} & (\varphi^t)_{t>\mathfrak{s}} & (\mathcal{V}^t)_{t>\mathfrak{s}} \end{pmatrix}$ eine St-Matrix der Länge $l(\mathfrak{s})$. Dann heißt $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ eine Sd-Matrix der Länge l .

Die Definitionen dreispaltiger Vb-Matrizen der Länge l in 6.2 und dreispaltiger Mf-Matrizen der Länge l in 7.5 schließen die vorliegende Rekursion ab. Für den Rest des Paragraphen setze ich diese Definitionen sowie einige Aussagen über sie aus den folgenden Paragraphen voraus.

Sei $\text{Ob} \neq \text{Sd}$. Dreispaltige Ob-Matrizen waren bisher stets voll besetzt, sinnvoll sind aber auch andere Möglichkeiten: $\begin{pmatrix} Y & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ heißt eine Ob-Matrix der Besetzung $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$, wenn $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ eine Sd-Matrix und $\begin{pmatrix} Y & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ eine Ob-Matrix ist. $(Y \ \psi \ \mathcal{Q})$ heißt eine Ob-Matrix der Besetzung $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$, wenn Δ, φ und \mathcal{V} existieren, so daß $\begin{pmatrix} Y & \psi & \mathcal{Q} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ eine Ob-Matrix ist.

QUOTIENTENSTRUKTUREN

Statt „ $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ ist eine Sd-Matrix“ sage ich auch „ \mathcal{Q} ist eine Quotientenstruktur von $(\Delta \ \varphi)$ “. Statt „ $\begin{pmatrix} Y & \psi & \mathcal{Q} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ ist eine Ob-Matrix“, $\text{Ob} \neq \text{Sd}$, sage ich auch „ \mathcal{Q} ist eine Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ “ oder „ \mathcal{Q} ist eine Quotientenstruktur von $(Y \ \psi)$ über $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ “. Statt „ $(Y \ \psi \ \mathcal{Q})$ ist eine Ob-Matrix“ sage ich auch „ \mathcal{Q} ist eine Quotientenstruktur von Y “.

„Quotientenstrukturen“ nenne ich im Falle von äquivarianten Vektorräumen, Scheibentypen oder Scheibendiagrammen auch „Linearisierungen“. Ein Objekt Y der Sorte Vr, St oder Sd heiße linearisierbar, wenn eine Ob-Matrix $(Y \ \psi \ \mathcal{V})$ existiert. Laut Korollar 4.19 besitzt Y stets ein Tubensystem, und laut (Sd) in Korollar 8.11 hängt die Existenz einer Linearisierung nicht von der Wahl des Tubensystems ab.

Erste Eigenschaften

KURZE QUOTIENTENSTRUKTUREN

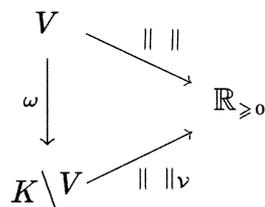
Jede Ob-Matrix der Länge 0 oder 1 besitzt genau eine Quotientenstruktur. Für St-Matrizen der Länge 2 siehe Proposition 5.10. Aus diesen ergeben sich leicht die Vr- und Sd-Matrizen der Länge 2.

ZWEI CHARAKTERISIERUNGEN VON VR-QUOTIENTENSTRUKTUREN

Lemma. Eine euklidische Struktur $\mathcal{V} = (+_{\mathcal{V}}, \cdot_{\mathcal{V}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ auf dem Quotienten $K \setminus V$ eines äquivarianten Vektorraums $K \rightarrow O(V)$ ist genau dann eine Quotientenstruktur auf einer V enthaltenden Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$, wenn gilt: 5.5

(L1) Die durch \mathcal{V} induzierte Topologie auf $K \setminus V$ stimmt mit der Quotiententopologie überein.

(L2) $\|Kv\|_{\mathcal{V}} = \|v\|$, d. h. das Diagramm



kommutiert.

(L3) $r \cdot_{\mathcal{V}} Kv = rKv := K(rv)$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

(L4) Die induzierte Operation von $\text{Aut}(V)/K$ auf $K \setminus V$ ist orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$.

(L5) Die durch \mathcal{V} auf $K \setminus V \setminus 0$ induzierte differenzierbare Struktur ist die Quotientenstruktur \mathcal{D} auf der Mf-Matrix $\begin{pmatrix} V \setminus 0 & \psi|_{V \setminus 0} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$.

DER BEWEIS ist leicht. \square

Sei weiterhin die Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ gegeben. Setze

$$d := \dim K \setminus V \setminus 0 = \dim(V \setminus 0) - \dim K + \dim L,$$

wobei (L) der Hauptorbittyp sei, und bezeichne mit $\bar{\sigma}$ die $\text{Aut}(V)$ -Operation auf $K \setminus S(V)$. Nenne einen Diffeomorphismus $f: K \setminus S(V) \rightarrow S^{d-1}$, der $\bar{\sigma}$ in eine orthogonale Operation auf S^{d-1} überführt, eine sphärische Linearisierungskarte:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Aut}(V)/\ker \bar{\sigma} & \xrightarrow{f \circ \circ f^{-1}} & O(d) \\
 \Omega & & \Omega \\
 K \setminus S(V) & \xrightarrow{f} & S^{d-1}
 \end{array}$$

Die Nebenklasse $O(d) \circ f = O(d) \circ f \circ \text{Aut}(V) \subset \text{Homöo}(K \setminus S(V), S^{d-1})$ ist genau die Menge der mit einer Karte f kompatiblen Karten, d. h. der f enthaltende maximale Atlas. Vr-Quotientenstrukturen und maximale Atlanten entsprechen einander umkehrbar eindeutig in offensichtlicher Weise.

5.6 Gleichwertig zur Angabe von f ist die Angabe einer Abbildung $\tilde{f}: K \setminus V \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit den Eigenschaften

(L1') \tilde{f} ist ein Homöomorphismus,

(L2') \tilde{f} ist normerhaltend,

(L3') \tilde{f} ist $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant,

(L4') $\tilde{f} \circ \bar{\sigma} \circ \tilde{f}^{-1}$ ist eine orthogonale Darstellung auf \mathbb{R}^d und

(L5') die Einschränkung $K \setminus V \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus 0$ ist ein Diffeomorphismus.

Nenne ein solches \tilde{f} eine Linearisierungskarte.

BEMERKUNGEN

Die Bemerkungen 4.16 zu Tubensystemen gelten sinngemäß auch für Quotientenstrukturen:

(1) Bei einer Vr- oder Vb-Quotientenstruktur genügt bereits ihr Keim im Nullpunkt bzw. im Nullschnitt.

(2) Vr- und St-Quotientenstrukturen entsprechen einander umkehrbar eindeutig.

(3) Eine Sd-Matrix ist stets einzeilig. Eine Linearisierung eines mit einem Tubensystem versehenen Scheibendiagramms ist eine Linearisierung per se und nicht eine Linearisierung über einer anderen.

(4) Mit den Bezeichnungen aus der Definition 7.5 der Mf-Matrizen überträgt $(\psi_s)^{-1}$ den Keim $\text{res}_{H \setminus M_s}(\mathcal{D})$ einer Mf-Quotientenstruktur in den Keim $\text{res}_{H \setminus 0_{NM_s}}(\mathcal{B}^s)$ einer Vb-Quotientenstruktur. Dieser Übergang heiße der Normalenabstieg von \mathcal{D} über das s -Stratum. Er ist im Beweis des Lemmas 6.5 entscheidend.

(5) Wie die Tubensysteme ließen sich auch Quotientenstrukturen rekursionsfrei definieren. Beweistechnisch ist jedoch gerade die Rekursivität vorteilhaft.

(6) Sei Y ein Objekt der Sorte Vr, Vb oder Mf, ψ ein Tubensystem von Y und \mathcal{Q} eine euklidische bzw. riemannsche bzw. differenzierbare Struktur auf dem Quotienten von Y . Dann gibt es höchstens eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \nu)$, so daß $\begin{pmatrix} Y & \psi & \mathcal{Q} \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$ eine Ob-Matrix ist.

5.7 BEMERKUNG ZUR ORTHOGONALITÄT

Ich arbeite durchgängig mit orthogonalen Darstellungen, weil zumindest in dem wichtigen Beispiel $\sigma: \mathbb{Z}_2 \rightarrow O(\mathbb{C}), \pm 1 \mapsto \pm \text{id}$, der Normalisator von $\text{im } \sigma$ in $GL(V)$ zu groß ist, um auf $K \setminus V$ linear operieren zu können: Setze $G := GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = GL(2; \mathbb{R})$. \mathbb{Z}_2 liegt via σ normal in G . Ein die effektive G/\mathbb{Z}_2 -Operation linearisierender Homöomorphismus $\mathbb{Z}_2 \setminus \mathbb{C} \approx \mathbb{C}$ lieferte eine Einbettung von G/\mathbb{Z}_2 in G . Das Element $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ hat die Ordnung 2, liegt in der Einskomponente, nicht aber im Zentrum $\mathbb{R}^\times / \mathbb{Z}_2$ von

G/\mathbb{Z}_2 . Das einzige Element der Ordnung 2 in der Einskomponente von G ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und liegt im Zentrum \mathbb{R}^\times von G . Daher kann es eine solche Einbettung nicht geben.

BEMERKUNG ZU RÄNDERN

5.8

$\mathbb{Z}_2 \backslash \mathbb{R}$ ist das einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Rand als Quotient einer Mannigfaltigkeit ohne Rand. Die Definitionen von Tubensystemen und Quotientenstrukturen ließen sich ohne Schwierigkeiten auf Mannigfaltigkeiten mit kubischen Ecken (siehe II §2) übertragen. In den Anwendungen mache ich davon bereits Gebrauch, weil es die Menge der linearisierbaren Scheibendiagramme beträchtlich vergrößert, worauf mich Prof. Dr. Peter Slodowy freundlicherweise aufmerksam gemacht hat, und weil in II 5.5 Vektorräume mit Hilfe von Halbräumen, diese mit Hilfe von Ecken konstruiert werden.

EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT VON LINEARISIERUNGEN

Ist eine Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ gegeben, so stellen sich mehrere Fragen:

5.9

- (1) Ist $K \backslash S(V)$ homöomorph zu einer Sphäre?
- (2) Wenn ja, ist $(K \backslash S(V), \mathcal{D})$, wobei \mathcal{D} die Quotientenstruktur auf

$$\begin{pmatrix} S(V) & \text{res}_{S(V)}(\psi) \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$$

bezeichnet, diffeomorph zu einer Standardsphäre?

- (3) Wenn ja, kann der Diffeomorphismus so gewählt werden, daß dabei die $\text{Aut}(V)/K$ -Operation in eine orthogonale Operation übergeht?

Dann und nur dann existiert nämlich eine Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$. Schon (1) ist selten der Fall, siehe z. B. Satz II 1.9. Ob (2) und (3) zusätzliche Hindernisse darstellen, ist mir nicht bekannt.

Auch stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit von Quotientenstrukturen: Sind \mathcal{U} und \mathcal{V} Quotientenstrukturen auf einer Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$, so kann $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ sein. Es wäre allenfalls zu hoffen, daß \mathcal{U} stets isotop zu \mathcal{V} ist; siehe 8.12.

Immerhin sind alle linearisierbaren äquivarianten Vektorräume der Länge 2 bekannt und ihre Linearisierungen eindeutig; siehe Proposition 5.10. Ebenso sind alle linearisierbaren äquivarianten Vektorräume $K \rightarrow O(V)$ mit abelschem K bekannt; siehe Satz II 5.11. Darüber hinaus wird in Korollar IV 2.8 eine Linearisierung der Länge 4 explizit konstruiert.

Da Linearisierungen von Scheibentypen und Scheibendiagrammen aus Linearisierungen äquivarianter Vektorräume bestehen, ist deren Existenz und Eindeutigkeit in gleichem Maße problematisch.

Als Folge der mangelnden Eindeutigkeit brauchen (Vr,Ts)-Morphismen keine Mor-

phismen der Quotienten zu induzieren: Seien $\begin{pmatrix} V & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} V' & \psi' & \mathcal{V}' \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ Vr-Matrizen und $f: V \rightarrow V'$ ein (Vr,Ts)-Morphismus. Dann braucht die induzierte Abbildung $\bar{f}: K \setminus V \rightarrow K' \setminus V'$ kein Isomorphismus euklidischer Vektorräume zu sein. Ich gehe deshalb umgekehrt vor und statte, wenn eine Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{S} \end{pmatrix}$ und ein Vr-Isomorphismus $f: V \rightarrow V'$ gegeben sind, V' mit dem übertragenen Tubensystem $f_*(\psi)$ und der übertragenen Quotientenstruktur $f_*(\mathcal{V})$ aus.

Linearisierungen der Länge 2

Ich gebe zum Schluß die Linearisierungen der äquivarianten Vektorräume der Länge 2 an. Dabei lasse ich auch Halbräume und Ecken sowohl „oben“, d. h. als äquivariante Vektorräume, als auch „unten“, d. h. als Quotienten äquivarianter Vektorräume, zu; vgl. Bemerkung 5.8. Es reicht zu wissen, daß dies $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(V)$ -invariante, den Nullpunkt enthaltende, zu $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ homöomorphe Teilmengen des äquivarianten Vektorraums bzw. des Quotienten sein sollen, und voraussetzen, daß die Charakterisierung 1.4 auch für berandete Mannigfaltigkeiten gilt.

Sei nun $K \rightarrow O(V)$ ein äquivarianter Vektorraum der Länge 2 und der Dimension $n + 1$. S^n bezeichne die Einheitssphäre von V . K operiert auf S^n homogen. $K \setminus S^n$ trägt die kanonische differenzierbare Struktur $\mathcal{E}^{\text{kan.}}$. $\bar{\sigma}$ bezeichne die induzierte Operation von $\text{Aut}(V)$ auf $K \setminus S^n$. Zu V existiert genau eine Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \{\epsilon\} & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$. Zur Angabe einer Quotientenstruktur genügt die Angabe einer sphärischen Linearisierungskarte $K \setminus S^n \xrightarrow{f} S^d$. Dazu wiederum genügt die Angabe des Kompositums $S^n \xrightarrow{f \circ \omega} S^d$ mit der Quotientenabbildung ω . Dieses ist ein Faserbündel, und zwar bei (3) die kleine, bei (4) die mittlere Hopffaserung (siehe unten).

5.10 Proposition. Die nach dem Schema

$$K < O(V)$$

$$\begin{array}{ccccc} \ker \bar{\sigma} & \hookrightarrow & \text{Aut}(V) & \twoheadrightarrow & f \circ \text{im } \bar{\sigma} \circ f^{-1} \\ & & \Omega & & \Omega \\ & & S^n & \twoheadrightarrow & S^d \\ & & x & \longmapsto & f(Kx) \end{array}$$

erstellte Liste

(1) $K < O(n + 1)$, transitiv auf S^n

$$\begin{array}{ccccc} \text{Nor}_{O(n)} K & \twoheadrightarrow & \text{Nor}_{O(n)} K & \twoheadrightarrow & O(0) \\ & & \Omega & & \Omega \\ & & S^n & \twoheadrightarrow & S_{\geq 0}^0 \end{array}$$

(2) $\mathbb{Z}/l < O(\mathbb{C})$ mit $l \geq 2$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/l & \longrightarrow & O(\mathbb{C}) & \longrightarrow & O(\mathbb{C}) \\ & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ & & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & & z & \longmapsto & z^l \end{array}$$

(3) $U(1) < O(\mathbb{H})$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} U(1) & \longrightarrow & Sp(1) \times_{\mathbb{Z}/2} \text{Nor}_{Sp(1)} U(1) & \longrightarrow & O(\text{Im } \mathbb{H}) \\ & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ & & S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & & q & \longmapsto & qi\bar{q} \end{array}$$

(4) $Sp(1) < O(\mathbb{H}^2)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/2 \times_{\mathbb{Z}/2} Sp(1) & \longrightarrow & Sp(2) \times_{\mathbb{Z}/2} Sp(1) & \longrightarrow & SO(\mathbb{H} \times \mathbb{R}) \\ & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ & & S^7 & \longrightarrow & S^4 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x\bar{y} \\ |x|^2 - |y|^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

gibt alle Linearisierungen von Scheibentypen der Länge 2 an. Ein linearisierbarer äquivarianter Vektorraum V der Länge 2 ist eindeutig linearisierbar, d.h. er ist Teil genau einer Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$.

BEWEIS. Existenz: Daß durch (1)–(4) tatsächlich Linearisierungen gegeben sind, erfordert lediglich Routineberechnungen und wird unterschlagen. Daß es keine weiteren linearisierbaren Scheibentypen der Länge 2 gibt, zeigt Lemma 5.11.

Eindeutigkeit: Aus (1)–(4) geht hervor, daß die Einskomponente von $\text{Aut}(V)/\ker \bar{\sigma}$ zu $SO(d)$ isomorph ist. Ist eine Linearisierung durch $K \setminus V \xrightarrow{f} S^d$ gegeben, so muß $f \circ (\text{Aut}(V)/\ker \bar{\sigma})_0 \circ f^{-1} = SO(d)$ sein. Sind Linearisierungen \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2 von V durch $K \setminus V \xrightarrow{f_1} S^d$ bzw. $K \setminus V \xrightarrow{f_2} S^d$ gegeben, so liegt $f_1 \circ f_2^{-1}$ in $\text{Nor}_{\text{Diff}e_0 S^d} SO(d)$, nach Lemma 5.12 also in $O(d+1)$. Dann ist aber $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. \square

Lemma. *K operiere homogen, effektiv und orthogonal auf $X := S^n$ oder einer zu D^n homöomorphen Teilmenge X von S^n , so daß $K \setminus X \approx S^d$ oder $K \setminus X \approx D^d$. Dann ist $X = S^n$ und $K < O(n+1)$ bis auf Konjugation in $O(n+1)$ in der obigen Liste enthalten.* **5.11**

BEWEIS. (1) K operiere homogen auf $X = S^n$. Dann ist $S^n \rightarrow K \setminus S^n$ ein Faserbündel, die Basis daher eine randlose Mannigfaltigkeit.

(2) Die Operation sei außerdem effektiv. Dann ist sie nach [Bredon], S. 198 und dem Zusatz auf S. 200, transitiv oder frei, und falls frei, so ist K endlich oder zu S^1 , $\text{Nor}_{\text{Sp}(1)} S^1$ oder $\text{Sp}(1)$ isomorph. Nur der freie Fall muß weiter betrachtet werden.

(3) Sei außerdem $K \setminus S^n \approx S^d$ oder $K \setminus S^n \approx D^d$. D^d kann nicht auftreten, da die Scheibe für $d > 0$ einen Rand hat und für $d = 0$ die Operation transitiv ist. Aus der Homotopiesequenz des Faserbündels $K \rightarrow S^n \rightarrow S^d$ ergibt sich:

- (a) K ist endlich und zyklisch, $n = d = 1$ oder
- (b) $K \cong S^1$, $n = 3$, $d = 2$ oder
- (c) $K \cong \text{Sp}(1)$, $n = 7$, $d = 4$.

(4) Die Operation sei außerdem orthogonal. Von den irreduziblen Darstellungen von $\text{Sp}(1)$ ist nur die Standarddarstellung auf \mathbb{H} abgesehen vom Ursprung frei. Operiert die Summe von Darstellungen außerhalb des Ursprungs frei, so auch jeder Summand. Damit sind nur noch die behaupteten Darstellungen möglich.

(5) K operiere homogen auf $X \approx D^n$, $n > 0$, mit $K \setminus X \approx S^d$ oder $K \setminus X \approx D^d$. Wegen (1) hat $K \setminus X$ einen Rand, folglich $K \setminus X \approx D^d$, $d > 0$, folglich $D^n \approx K/K_x \times D^d$, $x \in X$ beliebig, folglich $K_x = K$, folglich $K = 1$. \square

5.12 Lemma. $\text{Nor}_{\text{Diffeo}(S^d)} \text{SO}(d+1) = \text{O}(d+1)$.

BEWEIS. „ \supset “ ist klar. Sei deshalb $g \in \text{Nor}_{\text{Diffeo}(S^d)} \text{SO}(d+1)$, $x \in S^d$. Dann gilt:

$$T_x g \circ \text{SO}(d)_x = \text{SO}(d)_{g(x)} \circ T_x g$$

$$\Rightarrow T_x g \in \text{O}(T_x S^d, T_{g(x)} S^d) \times \mathbb{R}_{>0}, \text{ denn } \text{Nor}_{\text{GL}(d)} \text{SO}(d) = \text{O}(d) \times \mathbb{R}_{>0}$$

$\Leftrightarrow g$ ist konform.

Definiere für eine konforme Abbildung $h: S^d \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ durch die Vorschrift $x \mapsto \|T_x h\|$.

Für $A \in \text{SO}(d+1)$ ist

$$\hat{h} \circ A = \hat{h} \circ A \cdot \hat{A} = \widehat{h \circ A} = \widehat{A \circ h} = \hat{A} \circ h \cdot \hat{h} = \hat{h},$$

d.h. \hat{h} ist $\text{SO}(d)$ -invariant. Folglich ist \hat{h} konstant, denn $\text{SO}(d+1)$ operiert transitiv auf S^d . Folglich ist $\hat{h} = 1$, denn $\text{vol}(S^d) < \infty$. Das heißt aber $h \in \text{O}(d+1)$. \square

§6 Quotienten äquivarianter Vektorbündel

Quotienten äquivarianter Prinzipalbündel

Quotienten äquivarianter Prinzipalbündel tragen automatisch wieder dieselbe Struktur: Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(P)$ ein äquivariantes Prinzipalbündel mit Strukturgruppe S ; siehe 3.2 für die Notationen. Wähle $o \in P$. $R(o)$ bezeichnete die Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{N}(o) = \text{Nor}_S \text{ im } \iota_o = \text{Nor}_S K$. H operiert homogen auf B , auf $R(o)$

und auf P , weshalb $H \backslash P$, $H \backslash R(o)$ und $H \backslash B$ kanonische differenzierbare Strukturen besitzen. Man rechnet nach, daß $H \backslash R(o) \rightarrow H \backslash B$ ein differenzierbares $\mathcal{N}(o)/K$ -Prinzipalbündel ist, auf dem G/H durch Prinzipalbündelautomorphismen operiert.

$$\begin{array}{ccc} R(o) & \longrightarrow & H \backslash R(o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & H \backslash B \end{array}$$

ist ein kommutatives Diagramm differenzierbarer Faserbündel. Ein Pb-Morphismus $f: P \rightarrow P'$ induziert einen äquivarianten Morphismus $\bar{f}: H \backslash P \rightarrow H' \backslash P'$ von Prinzipalbündeln. 6.1

Quotienten äquivarianter Vektorbündel

In Fortführung von 5.1 definiere ich dreispaltige Vb-Matrizen der Länge l : Seien eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ der Länge l , ein äquivariantes Vektorbündel $F \rightarrow E \rightarrow B$ mit $\Delta(E) = \Delta$ und ein Tubensystem ψ von E über φ gegeben. 6.2

Nenne den Fuß des Scheibendiagramms von E \mathfrak{s} . Die Wahl von $K < O(F)$ gemäß Lemma 3.10 macht F zu einem äquivarianten Vektorraum mit Scheibentyp \mathfrak{s} . Sei P das $O(F)$ -Prinzipalbündel von E und R dessen Reduktion auf die Strukturgruppe $\text{Aut}(F)$ gemäß Lemma 3.12. Es sei daran erinnert, daß für $b \in B$ die Faser R_b die Menge der Vr-Isomorphismen von F nach E_b ist. $H \backslash R \rightarrow H \backslash B$ ist, wie oben gesehen, ein differenzierbares $\text{Aut}(F)/K$ -Prinzipalbündel mit G/H -Operation.

Andererseits enthält $\mathcal{V} \ \mathcal{V}^{\mathfrak{s}}$, $\mathcal{V}^{\mathfrak{s}}$ enthält seinerseits \mathcal{V}^F , so daß $(K \backslash F, \mathcal{V}^F)$ ein euklidischer Vektorraum mit orthogonaler $\text{Aut}(F)/K$ -Operation ist. Die dadurch auf $H \backslash R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \backslash F$ gegebene Struktur eines riemannschen Vektorbündels mit Basis $H \backslash B$ bezeichne ich mit $\mathcal{E}_{H \backslash R}^{\text{kan}} \times_{\text{Aut}(F)/K} \mathcal{V}^F$ oder kürzer mit $\mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{V}^F$. G/H operiert durch Bündelautomorphismen. Der über $H \backslash B$ liegende G/H -äquivariante Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} f: H \backslash R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \backslash F & \longrightarrow & H \backslash E \\ [Hr, Kv] & \longmapsto & Hr(v) \end{array}$$

definiert daher auf $H \backslash E \rightarrow H \backslash B$ die Struktur $\mathcal{B} := f_*(\mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{V}^F)$ eines riemannschen Vektorbündels, auf dem G/H durch Automorphismen operiert. Nenne nun $\begin{pmatrix} E & \psi & \mathcal{B} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ eine Vb-Matrix der Länge l .

Die Definition dreispaltiger Mf-Matrizen der Länge l in 7.5 schließt die vorliegende Rekursion ab. Für den Rest des Paragraphen setze ich diese Definition sowie einige

Aussagen über sie aus den folgenden Paragraphen voraus.

Wie schon in 4.13 wäre eine Definition der Quotientenstruktur \mathcal{B} mit Hilfe des Tubensystems ψ statt mit Hilfe der von der Wahl von K abhängenden Reduktion der Strukturgruppe schöner, aber komplizierter und für die Anwendung weniger geeignet.

BEMERKUNG. Es schadet nicht, wenn sich die Strukturgruppe weiter verkleinern läßt: Sei zusätzlich zu den obigen Daten $S \subset R$ eine äquivariante Reduktion der Strukturgruppe auf \mathcal{U} , wobei $K < \mathcal{U} < \text{Aut}(F) < \text{O}(F)$. Dann gilt auch

$$(H \backslash E, \mathcal{B}) \cong (H \backslash S, \mathcal{E}^{\text{kan}}) \times_{\mathcal{U}/K} (K \backslash F, \mathcal{V}^F),$$

denn $H \backslash R \cong H \backslash S \times_{\mathcal{U}/K} \text{Aut}(F)/K$. Für $\mathcal{K} = \mathcal{U}$, d. h. für eine globale Trivialisierung von $H \backslash E$, bedeutet das $\mathcal{B} = \mathcal{E}^{\text{kan}} \times \mathcal{V}^F$.

EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

6.3 Lemma. *Auf jeder Vb-Matrix $\begin{pmatrix} E & \psi \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$ existiert genau eine Quotientenstruktur \mathcal{B} .*

BEWEIS. Die Existenz ergibt sich sofort aus der Definition; zu zeigen bleibt ihre Unabhängigkeit von der Wahl von K . Wählt man K' mit denselben Eigenschaften wie K , so gibt es nach Lemma 3.10 ein $s \in \text{O}(F)$, so daß

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{s^{-1} \circ \cdot \circ s} & K' \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ F & \xrightarrow{s^{-1}} & F \end{array}$$

ein Vr-Isomorphismus ist. s konjugiert aber auch die zu K gebildete Reduktion R in die zu K' gebildete Reduktion R' (Satz 3.5).

$$(\text{id}_H, \text{id}_G, R \xrightarrow{\cdot s} R', \text{Nor}_K \text{O}(F) \xrightarrow{s^{-1} \circ \cdot \circ s} \text{Nor}_{K'} \text{O}(F))$$

ist daher ein Pb-Morphismus (3.6). Dies liefert nach 6.1 und 5.3 ein kommutatives Diagramm von Isomorphismen auf den Quotienten:

$$\begin{array}{ccc} H \backslash R \times_{\text{Nor}_K \text{O}(F)/K} K \backslash F & \longleftrightarrow & H \backslash R' \times_{\text{Nor}_{K'} \text{O}(F)/K'} K' \backslash F & [Hr, Kv] \longmapsto [Hrs, K'v] \\ & \searrow & \swarrow & \swarrow \quad \searrow \\ & H \backslash E & & Hr(v) \end{array}$$

Suggestiver schreibt sich die Umformung der Elemente auf Quotientenniveau als

$$HrKv = Hrss^{-1}Kss^{-1}v = HrsK's^{-1}v. \quad \square$$

MORPHISMEN INDUZIEREN MORPHISMEN

Mit denselben Hilfsmitteln zeigt man

Lemma. Seien $\begin{pmatrix} E & \psi & \mathcal{B} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E' & \psi' & \mathcal{B}' \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ Vb-Matrizen und $f: E \rightarrow E'$ ein (Vb, Ts) -Morphismus. Dann ist die induzierte Abbildung $\bar{f}: H \setminus E \rightarrow H' \setminus E'$ ein äquivarianter faserweiser Isomorphismus riemannscher Vektorbündel. 6.4

Sei $\begin{pmatrix} M & \psi \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ eine Mf-Matrix und $\mathfrak{s} \in \Delta$. Mit der in $\psi_{\mathfrak{s}}$ enthaltenen riemannschen Metrik und nach Wahl einer typischen Faser F ist $NM_{\mathfrak{s}} \rightarrow M_{\mathfrak{s}}$ laut Proposition 3.16 ein äquivariantes Vektorbündel, daher gemäß Lemma 6.3 Teil genau einer Vb-Matrix $\begin{pmatrix} NM_{\mathfrak{s}} & \psi & \mathcal{B} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$. Wie schon das Tubensystem ψ in Definition 4.13 hängt die Quotientenstruktur \mathcal{B} nicht von der Wahl von F ab, da verschiedene Wahlen zu isomorphen äquivarianten Vektorbündeln führen und daher mit Hilfe von Lemma 6.4 zur selben Quotientenstruktur.

SCHACHTELUNG

Das folgende Lemma benötige ich in Satz 7.7 für die Wohldefiniertheit der Quotientenstrukturen äquivarianter Mannigfaltigkeiten. Technisch gesehen ist sein Beweis der Höhepunkt dieses Kapitels. Der Begriff Quotientenstruktur sei außer für äquivariante Mannigfaltigkeiten der Länge l für alle Objekte der Länge höchstens l definiert.

Lemma. Sei eine Vb-Matrix $\begin{pmatrix} E & \psi & \mathcal{B} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ der Länge l gegeben und $\mathfrak{t} \in \Delta$. Dann ist das Normalenbündel $NE_{\mathfrak{t}}$ des Stratums $E_{\mathfrak{t}}$ Teil genau einer Vb-Matrix 6.5

$$\begin{pmatrix} NE_{\mathfrak{t}} & \psi' & \mathcal{B}' \\ St_{\geq \mathfrak{t}} & \varphi|_{St_{\geq \mathfrak{t}}} & \mathcal{V}|_{St_{\geq \mathfrak{t}}} \end{pmatrix},$$

und der Quotient $H \setminus NE_{\mathfrak{t}} \xrightarrow{\bar{\psi}_{\mathfrak{t}}} H \setminus E$ der Tubenabbildung $\psi_{\mathfrak{t}}$ ist nahe dem Nullschnitt ein Diffeomorphismus.

BEWEIS. Sei F die typische Faser von E und \mathfrak{s} der Fuß von Δ . Fasse F durch die Wahl eines $K < O(F)$ gemäß Lemma 3.10 als äquivarianten Vektorraum auf. Sei $L \rightarrow O(W)$ ein äquivarianter Vektorraum mit Scheibentyp \mathfrak{t} .

Siehe 3.14 für die Auffassung von $NE_{\mathfrak{t}}$ als geschachteltem Faserbündel: Das innere Bündel $NF_{\mathfrak{t}} \rightarrow F_{\mathfrak{t}}$, welches η heiße, ist mit W als typischer Faser ein äquivariantes Vektorbündel. Laut Lemma 6.3 ist $NF_{\mathfrak{t}} \rightarrow F_{\mathfrak{t}}$ Teil genau einer Vb-Matrix $\begin{pmatrix} NF_{\mathfrak{t}} & \psi'' & \mathcal{B}'' \\ St_{\geq \mathfrak{t}} & \varphi|_{..} & \mathcal{V}|_{..} \end{pmatrix}$. Dabei steht $\varphi|_{..}$ für eine geeignete Restriktion von φ , in diesem Falle für die Restriktion auf $St_{\geq \mathfrak{t}}$. Das obere Bündel $NE_{\mathfrak{t}} \rightarrow E_{\mathfrak{t}}$, welches μ heiße, ist

ebenfalls mit W als typischer Faser ein äquivariantes Vektorbündel. Laut Lemma 6.3 ist $NE_t \rightarrow E_t$ Teil genau einer Vb-Matrix $\begin{pmatrix} NE_t & \psi' & B' \\ \text{St}_{\geq t} & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$. Für die Reduktionen R , R_η und R_μ der Strukturgruppen nach Lemma 3.12 gilt nach Lemma 3.15 $E \cong R \times_{\text{Aut}(F)} F$, $NF_t \cong R_\eta \times_{\text{Aut}(W)} W$ und

$$NE_t \cong R_\mu \times_{\text{Aut}(W)} W \cong R \times_{\text{Aut}(F)} R_\eta \times_{\text{Aut}(L)} W \cong R \times_{\text{Aut}(F)} NF_t. \quad (b)$$

Jede Quotientenstruktur ist zumindest eine differenzierbare Struktur auf dem jeweiligen Quotienten; nur diese ist im folgenden gemeint. Die Familie \mathcal{V} enthält \mathcal{V}^s , \mathcal{V}^s enthält \mathcal{V}^F . Die Familie φ enthält φ^s , φ^s enthält φ^F , φ^F enthält $\varphi^F_t: NF_t \supset \rightarrow F$. $\overline{\varphi^F_t}: (K \setminus NF_t, \mathcal{B}'') \supset \rightarrow (K \setminus F, \mathcal{V}^F)$ ist der Keim einer offenen Einbettung: Für $t = s$ ist dies nach Definition von \mathcal{B}'' und, weil φ^F_s die kanonische Tube des tiefsten Stratum ist, klar. Für $t > s$ folgt dies aus der Eigenschaft (L5) von \mathcal{V}^F und der Definition der Quotientenstruktur der äquivarianten Mannigfaltigkeit $F \setminus 0$. Beachte, daß die Länge von $F \setminus 0$ echt kleiner als die Länge von E ist, so daß der Begriff Quotientenstruktur für $F \setminus 0$ definiert ist.

Die fragliche Abbildung ψ_t ist definiert durch

$$\begin{array}{ccc} NE_t & \supset \xrightarrow{\psi_t} & E \\ \cong & & \cong \\ R \times_{\text{Aut}(F)} NF_t & \supset \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \varphi_t} & R \times_{\text{Aut}(F)} F \end{array}$$

Teilen durch H ergibt

$$\begin{array}{ccc} (H \setminus NE_t, \mathcal{B}') & \supset \xrightarrow{\overline{\psi_t}} & (H \setminus E, \mathcal{B}) \\ \uparrow f & & \uparrow g \\ (H \setminus R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \setminus NF_t, \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{B}'') & \supset \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \overline{\varphi_t}} & (H \setminus R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \setminus F, \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{V}^F). \end{array}$$

$\text{id} \times \text{id} \overline{\varphi_t}$ ist der Keim einer offenen Einbettung, da $\overline{\varphi_t}$ dies ist. g ist nach Definition von \mathcal{B} ein Diffeomorphismus. f ist ein Diffeomorphismus, da gilt

$$\begin{aligned} (H \setminus NE_t, \mathcal{B}') &\cong (H \setminus R_\mu \times_{\text{Aut}(W)/L} L \setminus W, \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{V}^W) \\ &\cong (H \setminus R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \setminus R_\eta \times_{\text{Aut}(W)/L} L \setminus W, \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{V}^W) \\ &\cong (H \setminus R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \setminus NF_t, \mathcal{E}^{\text{kan}} \times_{\bullet} \mathcal{B}''). \end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Isomorphie nach Definition von \mathcal{B}' , die zweite wegen (b) und weil aufgrund der Homogenität der Operationen die „Produktbildung“ \times_{\bullet} assoziativ ist, die dritte gilt nach Definition von \mathcal{B}'' . Insgesamt ist daher $\overline{\psi_t}$ der Keim einer offenen Einbettung wie behauptet. \square

§7 Quotienten äquivarianter Mannigfaltigkeiten

Abstrakte Stratifizierungen¹

Sei A ein lokal kompakter Hausdorffraum, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt. In diesem sogenannten abstrakten Fall sind die Begriffe „Tuben“ (vgl. Definition 4.3) und „Stratifizierung“ (vgl. Definition 2.10) notwendigerweise etwas schwächer definiert als bei Vorliegen einer umgebenden Mannigfaltigkeit.

Sei $X \subset A$ lokal abgeschlossen. Ein Tripel (T, π, ϱ) , bestehend aus einer offenen Umgebung T von X in A , einer Retraktion $\pi: T \rightarrow X$, genannt lokale Retraktion, und einer Abbildung $\varrho: T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varrho^{-1}(0) = X$, genannt tubuläre Funktion, heißt eine (abstrakte) Tubenumgebung von X in A . Nahe X gleiche Tubenumgebungen heißen äquivalent, die Äquivalenzklassen (abstrakte) Tuben von X in A .

Definition. Ein Tripel $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ heißt eine schwache abstrakte Stratifizierung, wenn **7.1** gilt:

- (1) A ist ein lokal kompakter, hausdorffscher topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
- (2) \mathbf{S} ist eine Menge von Strata genannten, randlosen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so daß gilt:
 - (i) Für $(X, \mathcal{E}) \in \mathbf{S}$ ist X ein lokal abgeschlossener Unterraum von A ,
 - (ii) A ist mengentheoretisch die disjunkte Vereinigung der Strata,
 - (iii) die Zerlegung in Strata ist lokal endlich, d. h. jeder Punkt von A besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Strata schneidet,
 - (iv) die Randbedingung $\forall (X, \mathcal{E}), (Y, \mathcal{F}) \in \mathbf{S}: X \cap \bar{Y} \neq \emptyset \Rightarrow X \subset \bar{Y}$ ist erfüllt.
- (3) \mathcal{T} ist eine Familie, bestehend aus genau einer Tube $\mathcal{T}_X = [(T_X, \pi_X, \varrho_X)]$ für jedes Stratum (X, \mathcal{E}) , so daß für $X < Y$ nahe X gilt:
 - (i) $Y \supset \xrightarrow{(\pi_X, \varrho_X)} X \times \mathbb{R}_{>0}$ ist eine differenzierbare Submersion,
 - (ii) $\pi_X \circ \pi_Y = \pi_X$ nahe Y .

Gilt zusätzlich

- (iii) $\varrho_X \circ \pi_Y = \varrho_X$ nahe Y ,

heißt $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ eine abstrakte Stratifizierung.

Seien $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ und $(A', \mathbf{S}', \mathcal{T}')$ schwache abstrakte Stratifizierungen. Eine stetige Abbildung $f: A \rightarrow A'$, so daß für jedes $X \in \mathbf{S}$ ein $X' \in \mathbf{S}'$ mit den Eigenschaften **7.2**

- (1) $f(X) \subset X'$,
- (2) $X \xrightarrow{f} X'$ ist differenzierbar,

¹Die Terminologie folgt [Verona].

- (3) $\pi_{X'} \circ f = f \circ \pi_X$ nahe X und
 (4) $\varrho_{X'} \circ f = \varrho_X$ nahe X

existiert, heißt ein Morphismus von $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ nach $(A', \mathbf{S}', \mathcal{T}')$. Sind zusätzlich die Einschränkungen $X \xrightarrow{f} X'$ submersiv, heißt er eine stratifizierte Submersion.

Sei nun \mathbf{S} eine Whitney-Stratifizierung einer Teilmenge A einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , und zwar so, daß die Strata differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind. Sei $(U \xrightarrow{\varphi} M, \vartheta)$ eine Tubenumgebung von $X \in \mathbf{S}$ in M . Dabei war U eine offene Umgebung des Nullschnitts des Normalenbündels von X in M und ϑ eine riemannsche Metrik dieses Normalenbündels. ν bezeichne die Bündelprojektion $NX \rightarrow X$. Setze $T := \varphi(U) \cap A$, dann ist

$$\left(T, \begin{array}{l} T \rightarrow X \\ m \mapsto \nu(\varphi^{-1}(m)) \end{array}, \begin{array}{l} T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ m \mapsto \vartheta(\varphi^{-1}(m), \varphi^{-1}(m)) \end{array} \right)$$

eine abstrakte Tubenumgebung von X in A . Insgesamt ist es möglich, Whitney-Stratifizierungen als abstrakte Stratifizierung aufzufassen:

7.3 Satz. Sei G kompakt, liesch und \mathbf{S} eine Whitney-Stratifizierung einer Teilmenge A einer G -Mannigfaltigkeit M .

(1) Es gibt eine — in der Literatur Kontrolldaten genannte — Familie $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathbf{S}}$ von Tuben der jeweiligen Strata, so daß für $X < Y$ nahe X und Y

$$(\pi) \quad \pi_X \circ \pi_Y = \pi_X \text{ und}$$

$$(\varrho) \quad \varrho_X \circ \pi_Y = \varrho_X$$

gilt.

(2) Gilt für eine Familie φ von Tuben (π) und (ϱ) , so ist $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ eine abstrakte Stratifizierung.

(3) Gilt für eine Familie φ von Tuben (π) , so ist $(A, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ eine schwache abstrakte Stratifizierung.

Dabei bezeichnet \mathcal{T} jeweils die durch φ bestimmte Familie abstrakter Tuben.

DER BEWEIS aus [Mather I], S. 33 u. 41, wurde in [Lellmann], S. 24 u. 27, auf den äquivalenten Fall übertragen. \square

Sei nun $H \triangleleft G \xrightarrow{\varrho} \text{Diffeo}(M)$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit, \mathbf{S} ihre Scheibentypenstratifizierung, ψ ein Tubensystem über einem Tubensystem φ von $\Delta(M)$ und \mathcal{T} die durch ψ bestimmte Familie abstrakter Tuben. Setze

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &:= \{ (H \setminus X, \mathcal{E}^{\text{kan}}) \mid X \in \mathbf{S} \} \quad \text{und} \\ \bar{\mathcal{T}}_{H \setminus X} &:= [(H \setminus TX, H \setminus TX \xrightarrow{\pi_X} H \setminus X, H \setminus TX \xrightarrow{\varrho_X} \mathbb{R}_{\geq 0})] \end{aligned}$$

für $X \in \mathbf{S}$.

Die folgende, mit [Lellmann], S. 37, verwandte Aussage beschreibt Quotienten und Quotientenabbildung aus der Sicht abstrakter Stratifizierungen. Sie gilt ohne weitere Voraussetzungen an die Operation.

Proposition. $(M, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ und $(H \setminus M, \overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathcal{T}})$ sind abstrakte Stratifizierungen, und die Quotientenabbildung $\omega: M \rightarrow H \setminus M$ ist eine stratifizierte Submersion. 7.4

BEWEIS. (M, \mathbf{S}) ist laut 2.11 eine Whitney-Stratifizierung.

Nahe einem Stratum X überträgt ψ_X^{-1} das Mf-Tubensystem in ein Vb-Tubensystem; siehe Bemerkung (4) aus 4.16. Dieses entsteht aber durch Assoziieren eines Vr-Tubensystems der typischen Faser. Damit ist π_Y für $Y > X$ eine fasertreue Abbildung aus dem Totalraum in sich, und π_X ist die Projektion auf die Basis, d. h. es gilt (π) . Nach Konstruktion 4.10 von Vr-Tubensystemen gilt auch (ϱ) . Nach Satz 7.3 (2) ist dann $(M, \mathbf{S}, \mathcal{T})$ eine abstrakte Stratifizierung.

Das Herausteilen von H erhält alle benötigten Eigenschaften, insbesondere zeigt

$$\begin{array}{ccc} Y & \supset \xrightarrow[\text{submersiv}]{\pi_X \times \varrho_X} & X \times \mathbb{R}_{>0} \\ \text{surjektiv} \downarrow & & \downarrow \text{submersiv} \\ H \setminus Y & \supset \xrightarrow{\overline{\pi_X} \times \overline{\varrho_X}} & H \setminus X \times \mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

die Submersivität der unteren Abbildung nahe $H \setminus X$. $(H \setminus M, \overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathcal{T}})$ ist daher ebenfalls eine abstrakte Stratifizierung.

Die Aussage über ω ist nach Konstruktion von $\overline{\mathbf{S}}$ und $\overline{\mathcal{T}}$ trivial. \square

Nenne das Scheibentypenstratum $M_{\mathfrak{s}}$ zum Scheibentyp \mathfrak{s} einer äquivarianten Mannigfaltigkeit M auch das \mathfrak{s} -Stratum von M . Nenne das Stratum $H \setminus M_{\mathfrak{s}}$ des Quotienten $H \setminus M$ auch das \mathfrak{s} -Stratum von $H \setminus M$.

Die differenzierbare Struktur auf dem Orbitraum

In Fortführung von 5.1 und 6.2 definiere ich dreispaltige Mf-Matrizen der Länge l : Seien eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ der Länge l , eine äquivariante Mannigfaltigkeit $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ mit $\Delta(M) = \Delta$, ein Tubensystem ψ von M über φ und eine Struktur \mathcal{D} einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit auf dem Quotienten $H \setminus M$ gegeben. 7.5

Für $\mathfrak{s} \in \Delta$ ist der Quotient $H \setminus NM_{\mathfrak{s}} \supset \xrightarrow{\overline{\psi_{\mathfrak{s}}}} H \setminus M$ der Tubenabbildung $\psi_{\mathfrak{s}}$ der Keim einer topologischen offenen Einbettung. Andererseits ist das Normalenbündel $NM_{\mathfrak{s}} \rightarrow M_{\mathfrak{s}}$ des \mathfrak{s} -Stratums laut Proposition 3.16 und Lemma 6.3 Teil genau einer Vb-Matrix $\begin{pmatrix} NM_{\mathfrak{s}} & \chi^{\mathfrak{s}} & \mathcal{B}^{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{\geq \mathfrak{s}} & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$. Dadurch ist $(H \setminus NM_{\mathfrak{s}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{s}}) \longrightarrow (H \setminus M_{\mathfrak{s}}, \mathcal{E}^{\text{kan}})$ ein riemannsches Vektorbündel. Die durch $\mathcal{B}^{\mathfrak{s}}$ auf $H \setminus NM_{\mathfrak{s}}$ induzierte differenzierbare

Struktur heie \mathcal{D}^s . Für jedes $s \in \Delta$ sei $(H \setminus NM_s, \mathcal{D}^s) \supset \xrightarrow{\overline{\psi_s}} (H \setminus M, \mathcal{D})$ der Keim einer differenzierbaren offenen Einbettung. Dann heißt $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ eine Mf-Matrix der Länge l .

Damit ist die rekursive Definition der dreispaltigen Ob-Matrizen — mithin der Quotientenstrukturen — abgeschlossen.

ALTERNATIVE DEFINITION

Eine leichte Abwandlung des Begriffs der Tubenumgebung ermöglicht eine elegantere Formulierung der Definition 7.5:

Sei X eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M , E ein riemannsches Vektorbündel über X , $U \subset E$ eine offene Umgebung des Nullschnitts 0_E und $\varphi: U \rightarrow M$ eine offene Einbettung, so daß

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \cup & & \cup \\ 0_E & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

kommutiert. Dann heißt (E, φ) eine Tubenumgebung von X in M . φ stiftet den Isomorphismus $E \cong N0_E \xrightarrow{N\varphi} N0_{NX} \cong NX$, und die kommutative Ergänzung

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{N\varphi} & NX \\ \cup & & \cup \\ U & \longrightarrow & (N\varphi)(U) \\ \swarrow \varphi & & \nwarrow \text{---} \\ & & M \end{array}$$

ist zusammen mit der auf NX übertragenen riemannschen Metrik eine Tubenumgebung im alten Sinne 4.2.

Seien (E, φ) und (E', φ') Tubenumgebungen im neuen Sinne von X in M und $f: E \rightarrow E'$ ein Isomorphismus riemannscher Vektorbündel, so daß

$$\begin{array}{ccc} U & \supset \xrightarrow{f|_{..}} & U' \\ \swarrow \varphi & & \swarrow \varphi' \\ & & M \end{array}$$

nahe 0_E kommutiert. Dann heißt f ein Isomorphismus von (E, φ) nach (E', φ') . Wegen $f = \varphi'^{-1} \circ \varphi$ nahe 0_E gibt es höchstens ein solches f . Die Isomorphieklassen von Tubenumgebungen heißen wiederum Tuben. Sie entsprechen den Tuben nach der alten Definition umkehrbar eindeutig. Die einzige Neuerung ist die Freiheit bei der Benennung des Vektorbündels; genau die benötige ich aber in Lemma 7.6.

In der obigen Situation 7.5 ist der Quotient $\overline{\psi}_s$ der Tube ψ_s zusammen mit der Quotientenstruktur \mathcal{B}^s abgesehen davon, daß in Ermangelung einer differenzierbaren Struktur auf $H \setminus M$ von Differenzierbarkeit der Tubenabbildung (noch) nicht gesprochen werden kann, eine Tube des Quotientenstratums $H \setminus M_s$ in $H \setminus M$.

Lemma. Eine differenzierbare Struktur \mathcal{D} auf $H \setminus M$ ist genau dann eine Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} M & \psi & \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$, wenn $\overline{\psi} := (\overline{\psi}_s)_{s \in \Delta}$ eine Familie von Tuben der jeweiligen Strata ist. 7.6

DER BEWEIS ist trivial. \square

EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Formal analog zur eindeutigen Existenz 6.3 der Vb-Quotientenstrukturen, aber inhaltlich schwieriger, ist der folgende

Satz. Auf einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$ existiert genau eine Quotientenstruktur \mathcal{D} . 7.7

BEWEIS. Für $s \in \Delta$ bezeichnen χ^s das Tubensystem, \mathcal{B}^s die riemannsche Struktur und \mathcal{D}^s die differenzierbare Struktur aus Definition 7.5.

Eindeutigkeit: Gemäß Definition 7.5 ist \mathcal{D} eine Untergarbe der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $H \setminus M$ mit den folgenden Halmen: Sei $x \in M$ und s der Scheibentyp im Punkte x . Ein stetiger Funktionskeim $H \setminus M \supset \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ im Punkte Hx gehört genau dann zum Halm \mathcal{D}_{Hx} , wenn das Kompositum $(H \setminus NM_s, \mathcal{D}^s) \supset \xrightarrow{\overline{\psi}_s} H \setminus M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ein differenzierbarer Funktionskeim im Punkte $\overline{\psi}_s^{-1}(Hx)$ ist.

Existenz: Zu zeigen bleibt, daß sich diese Halme zu einer differenzierbaren Struktur auf $H \setminus M$ zusammenfügen. Sei $s \in \Delta$. Das folgende ist „nahe dem s -Stratum“ zu lesen.

Sei $t > s$ beliebig. Da ψ ein Tubensystem ist, können das Normalenbündel NM_t des t -Stratums in M und das Normalenbündel $N((NM_s)_t)$ des t -Stratums in NM_s als äquivalente Vektorbündel aufgefaßt werden, $N((NM_s)_t) \supset \xrightarrow{N\psi_s} NM_t$ ist ein injektiver Vb-Morphismus, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 NM_s & \supset \xrightarrow{\psi_s} & M \\
 \uparrow \chi^s_t & & \uparrow \psi_t \\
 \cap & & \cap \\
 N((NM_s)_t) & \supset \xrightarrow{N\psi_s} & N(M_t)
 \end{array} \tag{\#}$$

kommutiert.

Wie in 7.5 gibt es genau ein Tubensystem χ' und genau eine Quotientenstruktur \mathcal{B}' , so daß $\begin{pmatrix} N((NM_s)_t) & \chi' & \mathcal{B}' \\ \text{St}_{\geq t} & \varphi|_{\dots} & \nu|_{\dots} \end{pmatrix}$ eine Vb-Matrix ist. Nenne die durch \mathcal{B}' auf $H \setminus N((NM_s)_t)$ induzierte differenzierbare Struktur \mathcal{D}' .

Aus (#) entsteht durch Herausteilen von H das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (H \setminus NM_{\mathfrak{s}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{s}}) & \supset \xrightarrow{\overline{\psi}_{\mathfrak{s}}} & (H \setminus M, \mathcal{D}) \\ \overline{\chi}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{t}} \uparrow & & \uparrow \overline{\psi}_{\mathfrak{t}} \\ \cap & & \cap \\ (H \setminus N((NM_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{t}}), \mathcal{D}') & \supset \xrightarrow{\overline{N\psi}_{\mathfrak{s}}} & (H \setminus NM_{\mathfrak{t}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{t}}). \end{array}$$

$\overline{N\psi}_{\mathfrak{s}}$ ist als Quotient eines injektiven Vb-Morphismus eine differenzierbare offene Einbettung. $\overline{\chi}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{t}}$ ist nach Definition von $\mathcal{D}^{\mathfrak{s}}$ der Keim im \mathfrak{t} -Stratum einer offenen Einbettung. $\overline{\psi}_{\mathfrak{t}}$ überführt nach Definition von \mathcal{D} den Halm in einem Punkt des \mathfrak{t} -Stratums in den Halm des Bildpunktes. Daher überführt auch $\overline{\psi}_{\mathfrak{s}}$ den Halm in einem Punkt des \mathfrak{t} -Stratums in den Halm des Bildpunktes.

Da \mathfrak{t} beliebig war, ist \mathcal{D} damit nahe $H \setminus M_{\mathfrak{s}}$ als differenzierbare Struktur erkannt. Da \mathfrak{s} beliebig war und $H \setminus M$ durch Umgebungen der Quotientenstrata überdeckt wird, ist \mathcal{D} insgesamt eine differenzierbare Struktur. \square

BEMERKUNG ZUM BEWEIS. Wähle für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$ eine offene Umgebung $U^{\mathfrak{s}}$ des Nullschnitts von $NM_{\mathfrak{s}}$ und einen Repräsentanten $\alpha_{\mathfrak{s}}: U^{\mathfrak{s}} \rightarrow M$ von $\psi_{\mathfrak{s}}$, so daß die Gleichung $\alpha_{\mathfrak{s}}^*(\psi) = \chi^{\mathfrak{s}}$ des Normalenabstiegs auf $U^{\mathfrak{s}}$ erfüllt ist. Erneutes Lesen des Beweises zeigt, daß $\overline{\alpha}_{\mathfrak{s}}$ eine offene Einbettung ist. \mathcal{D} kann daher durch

$$\forall \mathfrak{s} \in \Delta: \mathcal{D}|_{\overline{\alpha}_{\mathfrak{s}}(H \setminus U^{\mathfrak{s}})} := \alpha_{\mathfrak{s}*}(\mathcal{D}^{\mathfrak{s}}|_{H \setminus U^{\mathfrak{s}}})$$

definiert werden. Die Hilfsaussage 6.5 gilt ebenfalls für solche Repräsentanten. Die geschachtelt lokale Argumentation des obigen Beweises kann dadurch vermieden werden.

BEMERKUNG ZUR TUBENFAMILIE DES QUOTIENTEN. Bei $\overline{\psi}$ ist ein Normalenabstieg analog zu dem bei ψ möglich. Zum Zwecke induktiven Beweisens ließen sich sogar für beliebige Stratifizierungen Tubensysteme definieren, indem man Reduktionen der Strukturgruppen der Normalenbündel der Strata fixiert und auf deren Fasern Familien von invarianten Tuben wählt.

MORPHISMEN

Um den Übergang zu den Quotienten als Funktor auffassen zu können, fehlt noch die Aussage „Morphismen induzieren Morphismen“:

7.8 Satz. Seien Mf-Matrizen $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} M' & \psi' & \mathcal{D}' \\ \Delta' & \varphi' & \mathcal{V}' \end{pmatrix}$ sowie ein (Mf, Ts)-Morphismus $f: M' \rightarrow M$ gegeben. Dann ist $\Delta' \subset \Delta$ und $\varphi' = \varphi|_{\Delta'}$. Sei auch $\mathcal{V}' = \mathcal{V}|_{\Delta'}$. Dann ist die induzierte Abbildung $\overline{f}: (H' \setminus M', \mathcal{D}') \longrightarrow (H \setminus M, \mathcal{D})$ differenzierbar.

BEWEIS. Sei $\mathfrak{s} \in \Delta$. Nach Definition der (Mf,Ts)-Morphismen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} NM'_\mathfrak{s} & \xrightarrow{Nf} & NM_\mathfrak{s} \\ \cup & & \cup \\ \psi'_\mathfrak{s} \downarrow & & \downarrow \psi_\mathfrak{s} \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

nahe dem Nullschnitt. Die Quotienten $\overline{\psi'_\mathfrak{s}}$ und $\overline{\psi_\mathfrak{s}}$ sind aufgrund der Definition von \mathcal{D}' bzw. von \mathcal{D} keine offener Einbettungen. Der Quotient \overline{Nf} ist als Quotient eines (Vb,Ts)-Morphismus insbesondere differenzierbar. Deshalb ist auch \overline{f} nahe dem \mathfrak{s} -Stratum $H' \setminus M'_\mathfrak{s}$ differenzierbar. Da \mathfrak{s} beliebig war, ist \overline{f} überall differenzierbar. \square

Korollar. G/H operiert auf $H \setminus M$ durch Diffeomorphismen.

BEWEIS. Sei $g \in G$, ϱ bezeichne die Operation von G auf M . Anwendung des vorigen Satzes auf den äquivarianten Diffeomorphismus $\varrho(g): M \rightarrow M$ liefert $M' = M$, $\psi' = \psi$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, folglich die Differenzierbarkeit von $\overline{\varrho(g)}: (H \setminus M, \mathcal{D}) \rightarrow (H \setminus M, \mathcal{D})$. \square

Eine offene Einbettung induziert eine offene Einbettung der Quotienten:

Korollar. Sei eine Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ gegeben und U eine offene Teilmenge von M . Dann ist auch $\begin{pmatrix} U & \psi|_U & \mathcal{D}|_{H \setminus U} \\ \Delta(U) & \varphi|_{\Delta(U)} & \mathcal{V}|_{\Delta(U)} \end{pmatrix}$ eine Mf-Matrix, die Inklusion $U \rightarrow M$ ist ein (Mf, Ts)-Morphismus und ihr Quotient $(H \setminus U, \mathcal{D}|_{H \setminus U}) \rightarrow (H \setminus M, \mathcal{D})$ eine offene Einbettung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

BEWEIS. $\mathcal{D}|_{H \setminus U}$ erfüllt gerade die Eigenschaften der Quotientenstruktur auf

$$\begin{pmatrix} U & \psi|_U \\ \Delta(U) & \varphi|_{\Delta(U)} \quad \mathcal{V}|_{\Delta(U)} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Eine homogen operierende, normale Untergruppe darf vorab herausgeteilt werden:

Korollar. Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit und K eine normal in G liegende Untergruppe von H , die auf M homogen operiere. Dann gilt: 7.9

(1) $K \setminus M$ besitzt die kanonische differenzierbare Struktur \mathcal{E}^{kan} und

$$H/K \triangleleft G/H \rightarrow \text{Diffeo}(K \setminus M)$$

ist eine äquivariante Mannigfaltigkeit. Es gilt $(K \setminus M)_\mathfrak{s} = K \setminus M_\mathfrak{s}$, d. h. der Quotient der Scheibentypenstratifizierung von M ist die Scheibentypenstratifizierung von $K \setminus M$. Folglich ist $\Delta(K \setminus M) = \Delta(M) =: \Delta$.

- (2) Sei ψ ein Tubensystem von M über einem Tubensystem φ von Δ . Dann ist der Quotient $K \setminus \psi$ ein Tubensystem von $K \setminus M$ über φ .
- (3) Sei weiter \mathcal{V} eine Linearisierung von (Δ, φ) . Dann existiert genau eine Quotientenstruktur \mathcal{D} auf $\begin{pmatrix} M & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$ und genau eine Quotientenstruktur $\widehat{\mathcal{D}}$ auf $\begin{pmatrix} K \setminus M & K \setminus \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}$, und die kanonische Bijektion

$$(H \setminus M, \mathcal{D}) \xleftarrow{\bar{f}} (H/K \setminus K \setminus M, \widehat{\mathcal{D}})$$

ist ein G -äquivarianter Diffeomorphismus.

BEWEISANLEITUNG. Im wesentlichen folgt die Differenzierbarkeit von \bar{f} durch Anwendung des Satzes 7.8 auf die Quotientenabbildung $M \xrightarrow{f} K \setminus M$. Da \bar{f} tangential und normal zu den Strata jeweils maximalen Rang besitzt, ist \bar{f} ein Diffeomorphismus. \square

WEITERE EIGENSCHAFTEN DER QUOTIENTENSTRUKTUR

Ich definiere ad hoc: Eine stetige Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $f: M \rightarrow M'$ heie genau dann wegweise submersiv, wenn für jedes $x \in M$ und jedes $w \in T_{f(x)}M'$ eine differenzierbare Abbildung $c: I \rightarrow M$ existiert, so daß $f \circ c$ differenzierbar und $(f \circ c)'(0) = w$ ist. Dabei ist wie üblich $I := [0, 1]$ gesetzt. Eine Abbildung ist genau dann eine differenzierbare Submersion, wenn sie differenzierbar und wegweise submersiv ist. Sei nun eine Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ gegeben.

7.10 Proposition. Die Quotientenabbildung $\omega: M \rightarrow H \setminus M$ ist wegweise submersiv.

BEWEIS durch Induktion über die Länge des Scheibendiagramms.

Für einen äquivarianten Vektorraum $K \rightarrow O(V)$ ist $\omega: V \rightarrow (K \setminus V, \mathcal{V})$ wegweise submersiv: Sei $Kv \in K \setminus V \cong T_{K0}(K \setminus V)$. Setze $c: I \rightarrow V$, $t \mapsto tv$. Dann ist $t \mapsto \omega \circ c(t) = Ktv = tKv$ differenzierbar und $(\omega \circ c)'(0) = Kv$. Damit ist ω im Nullpunkt wegweise submersiv. Außerhalb des Nullpunkts ist ω nach Induktionsannahme wegweise submersiv.

Für ein quivariantes Vektorbündel E weist man die wegweise Submersivitt von $\omega: E \rightarrow (H \setminus E, \mathcal{B})$ nach Reduktion der Strukturgruppe anhand des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} R \times F & \xrightarrow[\text{differenzierbare Struktur}]{\text{kanonische}} & R \times_{\text{Aut}(F)} F & \cong & E \\ \text{wegweise} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \omega \\ \text{submersiv} & & & & \\ R \times K \setminus F & \xrightarrow{\text{submersiv}} & H \setminus R \times K \setminus F & \xrightarrow{\text{submersiv}} & H \setminus R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \setminus F & \cong & H \setminus E \end{array}$$

nach.

Im Falle der äquivarianten Mannigfaltigkeit kommutiert

$$\begin{array}{ccc} NM_{\mathfrak{s}} & \supset \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{s}}} & M \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ H \backslash NM_{\mathfrak{s}} & \supset \xrightarrow{\overline{\psi_{\mathfrak{s}}}} & H \backslash M \end{array}$$

für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$, und $\psi_{\mathfrak{s}}$ und $\overline{\psi_{\mathfrak{s}}}$ sind Diffeomorphismen nahe den \mathfrak{s} -Strata. \square

In Verbindung mit Satz 1.4 ergibt sich, daß die Quotientenabbildung ω genau dann differenzierbar ist, wenn H auf M homogen operiert!

Sei wiederum eine Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ gegeben. Laut Proposition 7.4 bilden die Quotienten der Scheibentypenstrata zusammen mit den Quotienten der Tuben eine abstrakte Stratifizierung $(\overline{S}, \overline{T})$ von $H \backslash M$. Die differenzierbare Struktur \mathcal{D} auf $H \backslash M$ läßt aber mehr erhoffen:

Proposition. *Der Quotient \overline{S} der Scheibentypenstratifizierung ist ein Whitney-Stratifizierung des Quotienten $(H \backslash M, \mathcal{D})$.* 7.11

BEWEIS. Zu zeigen bleibt Whitneys Bedingung (b):

Die Strata $K \backslash V_{\mathfrak{s}}$ eines äquivarianten Vektorraums $K \rightarrow O(V)$ sind Kegel mit Spitze 0 im Vektorraum $(K \backslash V, \mathcal{V})$, woraus (b) leicht folgt.

Ist nun $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut}(E)$ ein äquivariantes Vektorbündel, so schreibe wie üblich $E = R \times_{\text{Aut}(F)} F$ und $E_{\mathfrak{s}} = R \times_{\text{Aut}(F)} F_{\mathfrak{s}}$. Dann ist

$$H \backslash E = H \backslash R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \backslash F \quad \text{und} \quad H \backslash E_{\mathfrak{s}} = H \backslash R \times_{\text{Aut}(F)/K} K \backslash F_{\mathfrak{s}}.$$

Lokale Trivialisierungen von $H \backslash E \rightarrow H \backslash B$ trivialisieren daher gleichzeitig das Bündel $H \backslash E_{\mathfrak{s}} \rightarrow H \backslash B$. Bedingung (b) folgt nun aus dem linearen Fall, da sie stabil und lokal ist. Stabil heißt in diesem Zusammenhang: Gilt sie für $X, Y \subset M$, so auch für $X \times \mathbb{R}, Y \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$.

Die Behauptung folgt jetzt aus ihrer Gültigkeit für die Quotienten der Normalenbündel der Strata unter Zuhilfenahme der Tubenfamilie $\overline{\psi}$. \square

Sei wiederum $\begin{pmatrix} M & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ gegeben.

Proposition.

(1) *Der Quotient des Normalenbündels eines Scheibentypenstratums ist kanonisch G -äquivariant isomorph zum Normalenbündel des Quotienten dieses Stratums:*

$$H \backslash NM_{\mathfrak{s}} \cong N(H \backslash M_{\mathfrak{s}})$$

(2) *Der Quotient des Normalenraums am Orbit im Punkte $x \in M$ ist kanonisch*

G_x -äquivariant isomorph zum Tangentialraum des Orbitraums im Punkte $\omega(x)$:

$$H_x \backslash N_x Hx \cong T_{\omega(x)}(H \backslash M)$$

BEWEIS. Die Bezeichnungen folgen Definition 7.5. $H \backslash M$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vermöge \mathcal{D} . $H \backslash M_\mathfrak{s}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vermöge \mathcal{E}^{kan} . $H \backslash NM_\mathfrak{s} \rightarrow H \backslash M_\mathfrak{s}$ ist ein riemannsches Vektorbündel vermöge $\mathcal{B}^\mathfrak{s}$. Die Faser $H_x \backslash N_x Hx$ dieses Bündels ist ein euklidischer Vektorraum vermöge $\mathcal{V}^{N_x Hx}$, welches mittelbar in \mathcal{V} enthalten ist.

zu (1): Die fragliche Isomorphie folgt aus der Definition von \mathcal{D} und gab bereits Anlaß zu Lemma 7.6.

zu (2): Der Tangentialraum von $H \backslash M$ in $\omega(x)$ spaltet in Anwesenheit der Tube $\overline{\psi_\mathfrak{s}}$ kanonisch in horizontalen und vertikalen Anteil:

$$T_{\omega(x)}(H \backslash M) \cong T_{\omega(x)}(H \backslash M_\mathfrak{s}) \oplus N_{\omega(x)}(H \backslash M_\mathfrak{s})$$

Die kanonische Zerlegung des H_x -Moduls $N_x(Hx)$ in nichttrivialen und trivialen Anteil überträgt sich auf seinen Quotienten:

$$H_x \backslash N_x Hx \cong \frac{T_x M_\mathfrak{s}}{T_x Hx} \oplus H_x \backslash N_x M_\mathfrak{s}$$

Die beiden rechten Summanden sind nach (1) kanonisch isomorph. Die beiden linken Summanden sind es ebenfalls, denn $Hx \rightarrow M_\mathfrak{s} \rightarrow H \backslash M_\mathfrak{s}$ ist ein differenzierbares Faserbündel.

Zur G_x -Äquivarianz sei bemerkt: Auf $N_x Hx$ operiert die Standgruppe G_x ; auf $T_{\omega(x)}(H \backslash M)$ operiert die Standgruppe $(G/H)_{\omega(x)}$. Wegen $H \triangleleft G$ und $\omega(x) = Hx$ ist $\omega^{-1}((G/H)_{\omega(x)}) = G_{Hx} = HG_x$ und $H_x = H \cap G_x$. Daher induziert $G \rightarrow G/H$ den Isomorphismus $G_x/H_x \rightarrow (G/H)_{\omega(x)}$. \square

Der Gesichtspunkt (1) der Strata und ihrer Normalenbündel steht bei den Quotientenstrukturen im Vordergrund. Dies harmoniert jedoch laut (2) mit der Sichtweise der Orbits und Scheiben.

Zusammenfassung und Kritik

Ist man nur bereit, den Begriff „Linearisierbarkeit eines Scheibendiagramms“ zu akzeptieren, so erhält man unter Verzicht auf die technischen Einzelheiten einerseits und die Feinheiten der Ergebnisse andererseits folgenden

7.12 Existenzsatz. Sei $\varrho: H \times M \rightarrow M$ eine differenzierbare Operation einer kompakten Liegruppe auf einer Mannigfaltigkeit. Das Scheibendiagramm dieser Operation sei linearisierbar. Dann existiert auf dem Orbitraum $H \backslash M$ eine differenzierbare Struktur.

Dieser Satz leistet den Schluß von „lokal“ auf „global“: Das für die Existenz einer globalen differenzierbaren Struktur auf dem Orbitraum hinreichende Kriterium der Linearisierbarkeit entscheidet sich an dem lokalen Datum des Scheibendiagramms.

KONSTRUKTIVES VORGEHEN

Die Existenzbeweise der Quotientenstrukturen sind konstruktiv. Dies ist schlechter als eine Charakterisierung durch eine universelle Eigenschaft, geht aber über eine reine Existenzaussage hinaus. Daß mit den Quotientenstrukturen ein konkreter Umgang möglich ist, zeigen die Anwendungen in den folgenden Kapiteln.

FUNKTORIELLE EIGENSCHAFTEN

Vr, St, Sd, Vb und Mf sind als Kategorien definiert worden, weniger explizit auch die Ob-Matrizen der verschiedenen Sorten und Besetzungen.

Wichtig waren einige der Vergißfunktoren zwischen diesen Kategorien, z. B. der Übergang 2.4 von einem äquivarianten Vektorraum V zu der äquivarianten Mannigfaltigkeit $V \setminus 0$ oder $S(V)$, der die Länge um 1 vermindert, oder der Übergang von einem äquivarianten Vektorbündel mit Tubensystem und Vb-Quotientenstruktur zur äquivarianten Mannigfaltigkeit des Totalraums mit demselben Tubensystem und der unterliegenden Mf-Quotientenstruktur.

Schließlich lassen sich die Quotientenbildungen in verschiedener Weise als Funktoren auffassen. Sei beispielsweise eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi \ \mathcal{V})$ gegeben, \mathfrak{K} die Kategorie der mit Tubensystemen über φ ausgestatteten äquivarianten Mannigfaltigkeiten mit in Δ enthaltenem Scheibendiagramm als Objekten und (Mf,Ts)-Morphismen als Morphismen und \mathfrak{M} einfachheitshalber die Kategorie der Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen. Dann definiert $(M \ \psi) \mapsto (H \setminus M, \mathcal{D})$ für die Objekte und $f \mapsto \bar{f}$ für die Morphismen einen Funktor von \mathfrak{K} nach \mathfrak{M} .

Eine Schwäche ist der enge Morphismusbegriff bei äquivarianten Mannigfaltigkeit bzw. bei äquivarianten Mannigfaltigkeiten mit Tubensystem, bedingt durch die restriktive Definition der Vb- und Vr-Morphismen. 9.6 unternimmt einen ersten Schritt zur Zulassung interessanterer Morphismen.

EXISTENZ VON LINEARISIERUNGEN

Diese Frage wurde bereits in 5.9 diskutiert. Der kritische Punkt ist, daß bei äquivarianten Vektorräumen anders als bei äquivarianten Vektorbündeln und Mannigfaltigkeiten auf einer gegebenen Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix} \mathcal{W}$ nur selten eine Quotientenstruktur \mathcal{V} existiert. Da $K \setminus V$ in aller Regel topologische Singularitäten besitzt, ist dies ein grundsätzliches Problem. 5.9 enthält eine Übersicht linearisierbarer Scheibentypen. Generell stellt dieses Kapitel eine Vorgehensweise bereit, Strukturen geeigneter Art auf Quotienten äquivarianter Vektorräume zu Strukturen auf Quotienten äquivarianter Mannigfaltigkeiten zusammenzufügen.

7.13 DIFFERENZIERBARKEIT DER QUOTIENTENABBILDUNG

Sei $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M, \mathcal{E})$ eine äquivariante Mannigfaltigkeit, so daß auf $H \backslash M$ eine differenzierbare Struktur \mathcal{F} existiert. Vom differenzierbaren Standpunkt aus sind folgende Beziehungen zwischen ω und \mathcal{F} wünschenswert:

- (1) ω ist eine differenzierbare Submersion.
- (2) $\mathcal{F} = \omega_{\#} \mathcal{E}$.
- (3) ω ist differenzierbar.

(1) impliziert (2), (2) seinerseits (3). Nach Satz 1.4 ist (1) genau für homogene Operationen erreichbar. Über die in 1.5 definierte Garbe $\omega_{\#} \mathcal{E}$ im allgemeinen ist (mir) zu wenig bekannt, um entscheiden zu können, wann sie eine differenzierbare Struktur ist (vgl. [Bredon], S. 326).

7.14 Zwei Beispiele seien jedoch angegeben: Ist $l(\Delta(M)) = 2$ und besitzt jedes $\mathfrak{s} \in \Delta(M)$ einen auf der Einheitssphäre transitiven Repräsentanten — dies ist bis auf Zusammenhangsfragen und Symmetriegruppe Jänichs Definition einer Speziellen H -Mannigfaltigkeit —, so ist $(H \backslash M, \omega_{\#} \mathcal{E})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand (siehe [Bredon], S. 327).

Operiert andererseits \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{C} durch $z \mapsto \pm z$ (siehe Punkt (2) aus Proposition 5.10), so erwähnt [Bredon] auf S. 301 ohne Beweis, daß $(\mathbb{Z}_2 \backslash \mathbb{C}, \omega_{\#} \mathcal{E}_{\mathbb{C}})$ keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Ob wenigstens (3) (durch Abänderung von \mathcal{F}) immer erreicht werden kann, lasse ich offen.

Sei nun $\Delta(M)$ linearisierbar. Die Propositionen 7.4, 7.10 und 7.11 zeigen, daß \mathcal{D} vom stratifizierten Standpunkt aus betrachtet völlig zufriedenstellt. Aber welche der drei Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllt \mathcal{D} ? Im Falle homogener Operationen alle, ansonsten keine, da \mathcal{D} die Quotientenabbildung stattdessen wegweise submersiv macht.

7.15 Auf eine leichte Modifikation der Konstruktion von \mathcal{D} möchte ich noch eingehen: Der Einfachheit halber sei $l(\Delta(M)) = 2$, außerdem $V \in \mathfrak{s} \in \Delta(M)$ und $k: K \backslash V \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Linearisierungskarte von V . Dann kann statt k auch

$$\begin{array}{ccc} K \backslash V & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ K v & \longmapsto & f(|v|) \cdot k\left(\frac{v}{|v|}\right) \end{array}$$

mit irgendeinem Homöomorphismus $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, der auf $\mathbb{R}_{> 0}$ ein Diffeomorphismus ist, zur Definition einer differenzierbaren Struktur auf $K \backslash V$ herangezogen werden. Für die Speziellen H -Mannigfaltigkeiten hat [Feck] diese Modifikationen systematisch untersucht. Die Wahl $f(x) = x^2$ führt gerade zu $\omega_{\#} \mathcal{E}$; siehe 7.14. Für alle linearisierbaren äquivarianten Mannigfaltigkeiten der Länge 2 läßt sich die Differenzierbarkeit von ω durch die allerdings willkürliche Wahl eines f erreichen, dessen sämtliche Ableitungen im Nullpunkt verschwinden.

DIE MANGELNDE NOTWENDIGKEIT

Für eine äquivariante Mannigfaltigkeit M sind folgende Implikationen offensichtlich:

$\Delta(M)$ ist linearisierbar

$\Rightarrow H \backslash M$ besitzt eine differenzierbare Struktur, so daß \bar{S} eine Whitney-Stratifizierung und ω wegweise submersiv ist

$\Rightarrow H \backslash M$ besitzt eine differenzierbare Struktur

$\Rightarrow H \backslash M$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit.

Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrungen gelten oder ob in dem Spielraum zwischen „ $H \backslash M$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit“ und „ $\Delta(M)$ ist linearisierbar“ zunächst in vielen Abstufungen vorstellbare „pathologische“ Fälle tatsächlich auftreten. Dies ist eng verbunden mit der entsprechenden Frage für äquivariante

7.16

Vektorräume: Sei der äquivariante Vektorraum $K \rightarrow O(V)$ Teil einer Vr-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi & \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$ und \mathcal{D} die Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} S(V) & \text{res}_{S(V)}(\psi) & \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$\begin{pmatrix} V & \psi & \\ \Delta & \varphi & \nu \end{pmatrix}$ ist linearisierbar

$\Leftrightarrow \text{Aut}(V)/K \longrightarrow \text{Diffeo}(K \backslash S(V), \mathcal{D})$ ist isomorph zu einer Darstellungssphäre

$\Rightarrow (K \backslash S(V), \mathcal{D})$ ist diffeomorph zu einer Sphäre

$\Rightarrow K \backslash S(V)$ ist homöomorph zu einer Sphäre

$\Rightarrow K \backslash V$ ist homöomorph zu einem Vektorraum

$\Rightarrow K \backslash V \times \mathbb{R}^k, k$ geeignet, ist homöomorph zu einem Vektorraum

\Leftrightarrow Es gibt eine äquivariante Mannigfaltigkeit M , so daß $\Delta(M) = \Delta(V)$ und $H \backslash M$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Die letzte Äquivalenz zeigt das folgende Lemma aus [Neumann], der die Eigenschaft einer Operation $\varrho: H \times M \rightarrow M$, daß ihr Quotient eine evtl. berandete, topologische Mannigfaltigkeit ist, QM nennt.

Lemma. Für eine Operation $\varrho: H \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ einer kompakten Liegruppe sind äquivalent:

7.17

(1) ϱ hat QM.

(2) Jeder Scheibentyp $\mathfrak{s} \in \Delta_{\text{Jänich}}(\varrho)$ hat QM.

(3) Jeder Fuß $\mathfrak{s} \in \Delta_{\text{Jänich}}(\varrho)$ hat QM.

BEWEIS. $H \backslash M$ ist metrisierbar: Für eine invariante Metrik d auf M erweist sich $d(Hx, Hy) := \min\{d(u, v) \mid u \in Hx, v \in Hy\}$ als Metrik auf $H \backslash M$. Insbesondere ist $H \backslash M$ damit hausdorffsch. Nach Satz 1.1 ist der Orbitraum daher genau dann eine topologische Mannigfaltigkeit, wenn er lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n ist.

Nach dem Scheibensatz läßt sich $H \backslash M$ durch zu $H_x \backslash N_x(Hx), x \in M$, homöomorphe Räume offen überdecken. Dies zeigt die Äquivalenz von (1) und (2).

Ebenso läßt sich für jeden Fuß $[V] \in \Delta_{\text{Jänich}}(\varrho)$ $K \setminus V$ durch zu $K' \setminus V'$, $V' \geq V$, homöomorphe Räume offen überdecken. Dies zeigt die Äquivalenz von (2) und (3). \square

Für Operationen mit abelschem Scheibendiagramm kann die Frage 7.16, wie der Hauptsatz 5.11 des zweiten Kapitels zeigt, bejaht werden: Die Linearisierbarkeit des Scheibendiagramms ist notwendig dafür, daß der Quotient eine topologische Mannigfaltigkeit ist!

Im nichtabelschen Fall habe ich die Existenz pathologischer Fälle allerdings weder zu beweisen noch zu widerlegen versucht. Mein Hauptinteresse galt der Angabe eines „vernünftigen“ für die Existenz einer differenzierbaren Struktur auf dem Orbitraum hinreichenden Kriteriums.

§ 8 Isotopien

Quotientenstrukturen sind nicht für Objekte, sondern für mit Tubensystemen ausgestattete Objekte definiert. Tubensysteme existieren zwar immer, sind aber nicht eindeutig, und die Quotientenstrukturen hängen, wie das folgende Beispiel zeigt, tatsächlich von der Wahl des Tubensystems ab.

In diesem Paragraphen werden deshalb Isotopiebegriffe für Tubensysteme und Quotientenstrukturen eingeführt, so daß es auf jedem Objekt nur eine Isotopieklasse von Tubensystemen gibt und auf isotopen Tubensystemen isotope Quotientenstrukturen existieren. Die Isotopieklasse der Quotientenstruktur hängt daher nicht von der Wahl eines Tubensystems ab. Aus technischen Gründen beweise ich die Aussagen über Isotopien von Quotientenstrukturen nur für kompakte äquivariante Mannigfaltigkeiten bzw. äquivariante Vektorbündel mit kompakter Basis.

BEISPIEL für die Abhängigkeit der differenzierbaren Struktur von der Wahl des Tubensystems: Betrachte die äquivariante Mannigfaltigkeit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \triangleleft & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Diffeo}(V), \\ & & \pm 1 \longmapsto (v \mapsto \pm v) \end{array}$$

wobei V ein zweidimensionaler reeller Vektorraum sei. $V \setminus 0$ ist das Hauptstratum, 0 die Fixpunktmenge. Identifiziere T_0V mit V . Ein Skalarprodukt ϑ auf V bestimmt die Tube von 0 in V mit dem Keim von id_V in 0 als Tubenabbildung und ϑ als riemannscher Metrik des Normalenbündels $T_0V \rightarrow \{0\}$. Diese bildet zusammen mit der trivialen Tube des Hauptstratums ein Tubensystem.

Nach Proposition 5.10 besitzt der äquivariante Vektorraum $\mathbb{Z}_2 \rightarrow O(V, \vartheta)$ genau eine Linearisierung \mathcal{V}^ϑ . Diese Struktur \mathcal{V}^ϑ eines euklidischen Vektorraums auf $\mathbb{Z}_2 \setminus V$ liegt durch $\|\mathbb{Z}_2 v\| := \|v\|$ und $\triangleleft(\mathbb{Z}_2 v, \mathbb{Z}_2 w) := 2 \cdot \min\{\triangleleft(v, w), \triangleleft(-v, w)\}$, wobei \triangleleft den in $[0, \pi]$ gelegenen unorientierten Winkel bezeichnet, bereits fest. Für jede Basis

$\{v, w\}$ von V gilt:

$$\gamma_{v,w}: \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \setminus V, \mathcal{V}^\vartheta)$$

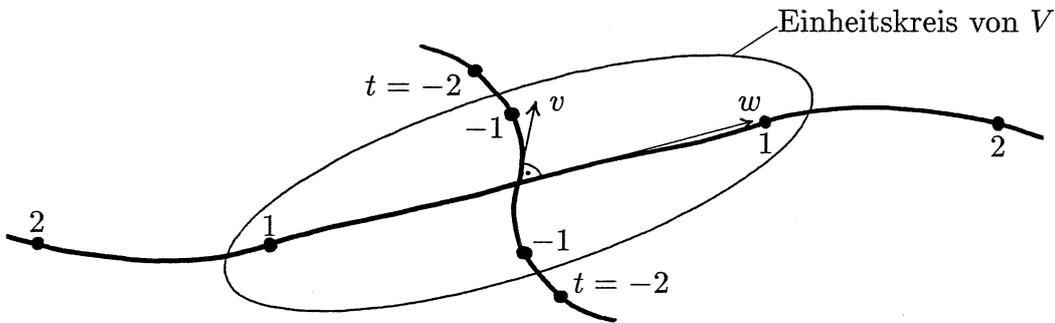
Der Weg

$$t \longmapsto \begin{cases} \pm tv & \text{für } t \leq 0 \\ \pm tw & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \text{ ist differenzierbar}$$

$\Leftrightarrow \gamma_{v,w}$ ist linear

$\Leftrightarrow \vartheta(v, v) = \vartheta(w, w)$ und $\vartheta(v, w) = 0$

$\Leftrightarrow \{v, w\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\frac{1}{\vartheta(v,v)}\vartheta$.



Zeichnung 4: Das Urbild unter der Quotientenabbildung einer differenzierbaren Kurve durch $\{0\}$

Das heißt, zwei Skalarprodukte führen genau dann zur selben differenzierbaren Struktur auf $\mathbb{Z}_2 \setminus V$, wenn sie zueinander proportional sind. Nach einer Identifikation $V \cong \mathbb{R}^2$ bildet etwa $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid b^2 < a \right\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Skalarprodukte modulo Proportionalität.

Schon die von Skalarprodukten herkommenden Tubensysteme — es gibt noch viele mehr — führen also zu einer zweidimensionalen Schar differenzierbarer Strukturen auf dem Quotienten.

Allgemeines

I bezeichne wie üblich das Einheitsintervall $[0, 1]$. Seien U und M topologische Räume (oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten) und $f: I \times U \rightarrow I \times M$ eine stetige (bzw. differenzierbare) Abbildung. Für $\forall t \in I$ heißt

$$\begin{aligned} f_t: U &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \text{pr}_2 \circ f(t, x) \end{aligned}$$

das Stadium von f zur Zeit t . f_0 heißt das Anfangsstadium, f_1 das Endstadium von f . Schreibe auch f^t statt f_t . f erhält den Parameter: $\Leftrightarrow \text{pr}_1 \circ f = \text{pr}_1$, d. h. $f(t, x) = (t, f_t(x))$. f ist konditioniert: $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall t < \varepsilon: f_t = f_0 \wedge f_{1-t} = f_1$. f startet mit der Inklusion: $\Leftrightarrow U \subset M$ und f_0 ist die Inklusionsabbildung von U in M . Nenne f auch „intern“. Falls dabei $U = M$ ist, startet f mit der Identität.

Ein den Parameter erhaltendes, konditioniertes f heißt eine (topologische bzw. differenzierbare) Isotopie von U in M . Bei den in diesem Paragraphen noch zu definierenden Isotopien von Tubenumgebungen, Tuben, Tubensystemen, Quotienten und Prinzipalbündeln treten weitere Eigenschaften hinzu.

8.1 Ein Isotopie f heißt eine Isotopie (offener) Einbettungen : \Leftrightarrow Jedes f_t ist eine (offene) Einbettung, d.h. f_t ist ein Homöomorphismus (bzw. Diffeomorphismus) auf sein Bild, und dieses ist offen in M . Bei einer Isotopie von Einbettungen setzte ich stillschweigend voraus, daß sie mit der Inklusion startet. Eine differenzierbare Isotopie von Einbettungen braucht selbst keine differenzierbare Einbettung zu sein. Hier irrt [Hirsch], S. 178, vgl. [Bröcker/Jänich], S. 100. Jedoch ist f genau dann eine differenzierbare Isotopie offener Einbettungen, wenn f eine konditionierte, differenzierbare offene Einbettung über I ist.

Eine Isotopie f heiße eine Isotopie von Automorphismen : $\Leftrightarrow f$ startet mit der Identität und jedes f_t ist ein Homöomorphismus (bzw. Diffeomorphismus). Eine Isotopie f heißt auch eine Isotopie von f_0 nach f_1 . Allerdings bezeichne ich Abbildungen bereits mit f_0 und f_1 , wenn ich die Existenz einer sie verbindenden Isotopie f erst behaupte. Eine Isotopie f heißt konstant : \Leftrightarrow Je zwei ihrer Stadien sind gleich.

Eine Isotopie kann durch $(t, x) \mapsto (t, f_0(x))$ für $t < 0$ und $(t, x) \mapsto (t, f_1(x))$ für $t > 1$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R} \times M$ fortgesetzt werden. Da $I \times U$ und $I \times M$ im differenzierbaren Fall „schlimmere“ Ränder als U bzw. M haben, denke sich der Leser f , wenn nötig, in der beschriebenen Weise fortgesetzt.

Isotopien von Tubensystemen

ISOTOPIEN VON TUBENUMGEBUNGEN

Sei X eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M , $NX \xrightarrow{\nu} X$ das Normalenbündel von X in M , und U eine offene Umgebung von 0_{NX} in NX . Eine differenzierbare Isotopie $\varphi: I \times U \rightarrow I \times M$ heißt eine Isotopie von Tubenabbildungen, wenn jedes φ_t eine Tubenabbildung von X in M ist.

Eine differenzierbare Isotopie $\vartheta: I \times X \rightarrow I \times NX \otimes NX$ heißt eine Isotopie riemannscher Metriken des Vektorbündels NX , wenn jedes ϑ_t eine riemannsche Metrik von NX ist.

Ein Paar (φ, ϑ) aus einer Isotopie φ von Tubenabbildungen und einer Isotopie ϑ riemannscher Metriken von NX heißt eine Isotopie von Tubenumgebungen von X in M . Statt (φ, ϑ) schreibe ich meist nur φ .

ISOTOPIEN VON TUBEN

Zwei Isotopien $\varphi: I \times U \rightarrow I \times M$ und $\psi: I \times V \rightarrow I \times M$ von Tubenabbildungen von X in M heißen äquivalent, wenn sie nahe $I \times 0_{NX}$ gleich sind. Eine Äquivalenzklasse zusammen mit einer Isotopie riemannscher Metriken des Normalenbündels heißt eine Isotopie von Tuben von X in M .

ISOTOPIEN VON TUBENSYSTEMEN

Eine Familie $\psi = (\psi_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta(M)}$ von Isotopien von Tuben heißt eine Isotopie von Tubensystemen der äquivarianten Mannigfaltigkeit M , wenn $\psi^t := ((\psi_{\mathfrak{s}})^t)_{\mathfrak{s} \in \Delta(M)}$ für jedes t ein Tubensystem der äquivarianten Mannigfaltigkeit M ist; analog für Vr und Vb.

Eine Familie $\psi = (\psi^V)_{V \in \mathfrak{s}}$ von Isotopien von Vr-Tubensystemen heißt eine Isotopie von Tubensystemen des Scheibentyps \mathfrak{s} , wenn $\psi^t := ((\psi^V)^t)_{V \in \mathfrak{s}}$ für jedes t ein Tubensystem des Scheibentyps \mathfrak{s} ist.

Eine Familie $\varphi = (\varphi^{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ von Isotopien von St-Tubensystemen heißt eine Isotopie von Tubensystemen des Scheibendiagramms Δ , wenn $\varphi^t := ((\varphi^{\mathfrak{s}})^t)_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ für jedes t ein Tubensystem des Scheibendiagramms Δ ist.

Nenne eine Isotopie ψ von Tubensystemen eines Objekts Y , welches kein Scheibendiagramm ist, über einer Isotopie φ von Tubensystemen des Scheibendiagramms $\Delta(Y)$ bzw. des verkürzten Scheibendiagramms $\Delta(Y) \setminus \{\text{Fuß}\}$ liegend, wenn für jedes $t \in I$ das Tubensystem ψ^t über dem Tubensystem φ^t liegt.

Die Matrixnotation wird auf Isotopien ausgedehnt: Nenne $(\Delta \ \varphi)_I$ eine Sd-Isotopie-Matrix, wenn φ eine Isotopie von Tubensystemen des Scheibendiagramms Δ ist. Nenne $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}_I$ eine Ob-Isotopie-Matrix, wenn außerdem $Y \in \text{Ob} \neq \text{Sd}$ mit $\Delta(Y) = \Delta$ bzw. $\Delta(Y) \setminus \{\text{Fuß}\} = \Delta$ und ψ eine Isotopie von Tubensystemen von Y über φ ist. Die Ob-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} Y & \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}_I$ erklärt sich von selbst.

Als Faustregel gilt: ψ ist eine Isotopie von was-auch-immer, wenn für jedes $t \in I$ das durch Hineinziehen des Parameters in sämtliche Familien definierte Zwischenstadium ψ^t ein was-auch-immer ist.

KURZE TS-ISOTOPIEN

Sei Y ein Objekt der Länge 0, 1 oder 2, jedoch keine äquivariante Mannigfaltigkeit der Länge 2. Dann besitzt Y gemäß 4.15 genau ein Tubensystem ψ^0 . Folglich besitzt Y genau eine Ts-Isotopie ψ , nämlich die konstante Isotopie von ψ^0 nach ψ^0 .

FORTSETZBARKEIT VON ISOTOPIEN VON TUBEN

Zur Anwendung in Lemma 8.3 benötige ich statt des starken Isotopiesatzes für Tuben 4.6 eine Folgerung aus dem Existenzsatz für Tuben 4.7:

Lemma. *Das folgende ist bezüglich einer Operation einer kompakten Liegruppe äquivariant zu lesen: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit X einer Mannigfaltigkeit M . φ^0 und φ^1 seien Tuben von X in M und φ_A der Keim in A einer Isotopie von $\text{res}_A(\varphi^0)$ nach $\text{res}_A(\varphi^1)$. Dann existiert eine φ_A fortsetzende Isotopie φ von φ^0 nach φ^1 .*

8.2

BEWEIS. Nach 8.1 ist eine Isotopie von Tuben von X in M eine konditionierte Tube von $I \times X$ in $I \times M$ über I und umgekehrt.

$$\chi := \begin{cases} \text{id}_I \times \varphi^0 & \text{nahe } \{0\} \times X \\ \varphi_A & \text{nahe } I \times A \\ \text{id}_I \times \varphi^1 & \text{nahe } \{1\} \times X \end{cases}$$

ist der — da φ_A konditioniert ist, wohldefinierte — Keim in $\{0\} \times X \cup I \times A \cup \{1\} \times X$ einer Tube von $I \times X$ in $I \times M$ über I . Laut Satz 4.7 läßt sich χ zu einer Tube von $I \times X$ in $I \times M$ über I fortsetzen. $\text{pr}_1: I \times M \rightarrow I$ spielt dabei die Rolle der in Satz 4.7 auftretenden Submersion. \square

FORTSETZBARKEIT VON ISOTOPIEN VON TUBENSYSTEMEN

8.3 Lemma.

- (Vr) Seien ψ^0 und ψ^1 Tubensysteme des äquivarianten Vektorraums V über φ^0 bzw. φ^1 und φ eine Isotopie von φ^0 nach φ^1 . Dann existiert eine Isotopie ψ von ψ^0 nach ψ^1 über φ .
- (St) Seien ψ^0 und ψ^1 Tubensysteme des Scheibentyps \mathfrak{s} über φ^0 bzw. φ^1 und φ eine Isotopie von φ^0 nach φ^1 . Dann existiert eine Isotopie ψ von ψ^0 nach ψ^1 über φ .
- (Sd) Seien $\Gamma \subset \Delta$ Scheibendiagramme, ψ^0 und ψ^1 Tubensysteme auf Δ und φ eine Isotopie von $\psi^0|_\Gamma$ nach $\psi^1|_\Gamma$. Dann existiert eine Isotopie ψ von ψ^0 nach ψ^1 mit $\psi|_\Gamma = \varphi$.
- (Vb) Über jeder Isotopie von Tubensystemen von $\Delta(E)$ liegt genau eine Isotopie von Tubensystemen von E .
- (Mf) Seien ψ^0 und ψ^1 Tubensysteme von M über φ^0 bzw. φ^1 , φ eine Isotopie von φ^0 nach φ^1 , $A \subset M$ abgeschlossen und ψ_A der Keim in A einer Isotopie von $\text{res}_A(\varphi^0)$ nach $\text{res}_A(\varphi^1)$ über $\varphi|_{\Delta(A)}$. Dann existiert eine ψ_A fortsetzende Isotopie ψ_M von ψ^0 nach ψ^1 über φ .

BEWEIS. Die Aussagen lassen sich analog zu denen des Existenzsatzes 4.18 zeigen, wobei in (Mf) statt auf die Fortsetzbarkeit von Tuben (Satz 4.7) auf die Fortsetzbarkeit von Isotopien von Tuben (Lemma 8.2) zurückgegriffen wird. \square

ISOTOPIEKLASSEN VON TUBENSYSTEMEN

Ein Tubensystem ψ^0 eines Objekts Y heißt isotop zu einem Tubensystem ψ^1 desselben Objekts : \Leftrightarrow Es gibt eine Ts-Isotopie ψ von Y mit Anfangsstadium ψ^0 und Endstadium ψ^1 . Offenbar ist Isotopie von Tubensystemen eine Äquivalenzrelation. Bezeichne die Isotopieklasse von ψ^0 mit $[\psi^0]$. Einprägsam formuliert lautet die für die meisten Anwendungen ausreichende Folgerung aus Lemma 8.3:

8.4 Korollar. Je zwei Tubensysteme eines Objekts sind isotop.

Ist Y kein Scheibendiagramm und sind ψ^0 und ψ^1 Tubensysteme von Y über ein und demselben Tubensystem φ^0 , so gibt es eine Isotopie ψ von ψ^0 und ψ^1 , die über der konstanten Isotopie $\text{id} \times \varphi^0$ liegt.

Isotopien von Quotienten

DEFINITIONEN

Isotopien von Quotienten — kurz: Q-Isotopien — werden rekursiv über die Länge definiert. $(\Delta \ \varphi \ f)_I$ heißt eine Sd-Isotopie-Matrix der Länge 0, wenn $(\Delta \ \varphi)_I$ eine Sd-Isotopie-Matrix der Länge 0 und f die leere Familie ist. $\begin{pmatrix} M & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ heißt eine 1der Länge 0, wenn außerdem $\begin{pmatrix} M & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}_I$ eine Mf-Isotopie-Matrix der Länge 0 und h die Abbildung $\emptyset \rightarrow \emptyset$ ist.

Rekursionsschritt: Seien jetzt dreispaltige Ob-Isotopie-Matrizen der Länge höchstens $l - 1$ bereits definiert.

$\begin{pmatrix} V & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ heißt eine Vr-Isotopie-Matrix der Länge l , wenn $(\Delta \ \varphi \ f)_I$ eine Sd-Isotopie-Matrix der Länge $l - 1$, $\begin{pmatrix} V & \psi \\ \Delta & \varphi \end{pmatrix}_I$ eine Vr-Isotopie-Matrix der Länge l und $h: I \times K \setminus V \rightarrow I \times K \setminus V$ eine stetige Abbildung ist, so daß in Anlehnung an Lemma 5.5 gilt:

- (I0) h erhält den Parameter, ist konditioniert und startet mit der Identität,
- (I1) h_t ist ein Homöomorphismus,
- (I2) h_t ist normerhaltend,
- (I3) h_t ist $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant,
- (I4) h_t ist $\text{Aut}(V)/K$ -äquivariant,
- (I5) $\begin{pmatrix} S(V) & \text{res}_{S(V)}(\psi) & h|_{..} \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ ist eine Mf-Isotopie-Matrix der Länge $l - 1$, wobei $h|_{..}$ die Einschränkung von h auf $I \times K \setminus S(V) \rightarrow I \times K \setminus S(V)$ bezeichnet.

$\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ heiße eine St-Isotopie-Matrix der Länge l , wenn $h = (h^V)_{V \in \mathfrak{s}}$ eine Familie ist, so daß für jedes $V \in \mathfrak{s}$ $\begin{pmatrix} V & \psi^V & h^V \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ eine Vr-Isotopie-Matrix ist und für jeden Vr-Morphismus $a: V \rightarrow V'$ mit $V, V' \in \mathfrak{s}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K \setminus V & \xrightarrow{h^V} & K \setminus V \\ \bar{a} \downarrow & & \downarrow \bar{a} \\ K' \setminus V' & \xrightarrow{h^{V'}} & K' \setminus V' \end{array}$$

kommutiert.

$(\Delta \ \varphi)_I$ heißt eine Sd-Isotopie-Matrix der Länge l , wenn $f = (f^{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s} \in \Delta}$ eine Familie ist, so daß für jedes $\mathfrak{s} \in \Delta$ $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi^{\mathfrak{s}} & f^{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{>\mathfrak{s}} & \varphi|_{..} & f|_{..} \end{pmatrix}_I$ eine St-Isotopie-Matrix ist.

Seien eine Sd-Isotopie-Matrix $(\Delta \ \varphi \ f)_I$ der Länge l , ein äquivariantes Vektorbündel $E \rightarrow B$ mit $\Delta(E) = \Delta$, eine über φ liegende Isotopie ψ von Tubensystemen von E und $U \subset_{\text{offen}} B$ gegeben. Schreibe wie üblich $E = R \times_{\text{Aut}(F)} F$. Weiter sei $g: I \times H \backslash R|_{H \backslash U} \rightarrow I \times H \backslash R$ eine interne Isotopie von Prinzipalbündeln, soll heißen: g ist eine $G \times \text{Aut}(F)$ -äquivariante, interne, differenzierbare Isotopie. Der Scheibentyp von F sei \mathfrak{s} ; dann enthält die Sd-Q-Isotopie f die St-Q-Isotopie $f^{\mathfrak{s}}$, diese wiederum die Vr-Q-Isotopie f^F . Definiere h durch $h_t := g_t \times_{\text{Aut}(F)} f_t^F$ — ausführlich notiert

$$\begin{aligned} h: I \times H \backslash E|_{H \backslash U} &\longrightarrow I \times H \backslash E \\ (t, [p, y]) &\longmapsto (t, [g_t(p), f_t^F(y)]) \end{aligned}$$

Dann heißt $\begin{pmatrix} E & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ eine Vb-Isotopie-Matrix der Länge l .

Wie üblich ist h wegen der $\mathbb{R}_{>0}$ -Äquivarianz durch seinen Keim im Nullschnitt bestimmt; zwischen beiden wird daher nicht unterschieden. Beachte ferner, daß jedes Stratum $H \backslash E_{\mathfrak{s}}$ die kanonische differenzierbare Struktur \mathcal{E}^{kan} besitzt und die Einschränkung $I \times H \backslash E_{\mathfrak{s}}|_{H \backslash U} \xrightarrow{h|_{\cdot}} I \times H \backslash E_{\mathfrak{s}}$ differenzierbar ist, da g differenzierbar ist.

Seien eine Sd-Isotopie-Matrix $(\Delta \ \varphi \ f)_I$ der Länge $l-1$, eine äquivariante Mannigfaltigkeit M mit $\Delta(M) = \Delta$, eine über φ liegende Isotopie ψ von Tubensystemen von M , eine offene Teilmenge U von M und eine G -äquivariante, interne, topologische Isotopie $f: I \times H \backslash U \rightarrow I \times H \backslash M$ gegeben. Für $\mathfrak{s} \in \Delta$ sei der als die kommutative Ergänzung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} I \times H \backslash U & \xrightarrow{h} & I \times H \backslash M \\ \uparrow \overline{\psi}_{\mathfrak{s}}|_{\cdot} & & \uparrow \text{id}_I \times \overline{\psi}_{\mathfrak{s}} \\ \cap & & \cap \\ I \times H \backslash NU_{\mathfrak{s}} & \xrightarrow{h^{\mathfrak{s}}} & I \times H \backslash NM_{\mathfrak{s}} \end{array} \quad (b)$$

definierte Keim $h^{\mathfrak{s}}$ der Keim einer Vb-Q-Isotopie auf $\begin{pmatrix} NM_{\mathfrak{s}} & \psi_{\mathfrak{s}} \\ \text{St}_{>\mathfrak{s}} & \varphi|_{\cdot} \quad f|_{\cdot} \end{pmatrix}_I$. Dann heißt

$\begin{pmatrix} M & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ eine Mf-Isotopie-Matrix der Länge l . Wegen (b) und der entsprechenden Bemerkung bei den Vb-Q-Isotopien ist für jedes \mathfrak{s} die Einschränkung von f zu $(I \times H \backslash U_{\mathfrak{s}}, \mathcal{E}^{\text{kan}}) \rightarrow (I \times H \backslash M_{\mathfrak{s}}, \mathcal{E}^{\text{kan}})$ differenzierbar.

Damit ist die Rekursion abgeschlossen.

Statt „ $\begin{pmatrix} Y & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ ist eine Ob-Isotopie-Matrix“ sage ich auch — wie bereits geschehen — „ h ist eine Q-Isotopie auf $\begin{pmatrix} Y & \psi \\ \Delta & \varphi \quad f \end{pmatrix}_I$ “.

Wünschenswert wäre ein Begriff von Q -Morphismen, so daß einerseits die Stadien der Q -Isotopien Isotopien von Q -Morphismen sind, andererseits (Ob,Ts)-Morphismen auf Quotientenniveau Q -Morphismen induzieren.

FORTSETZBARKEIT VON ISOTOPIEN MIT KOMPAKTEM KOMPLEMENT

Sei $A \underset{\text{abg}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} M$ und $f: I \times U \rightarrow I \times M$ eine interne, topologische oder differenzierbare Isotopie. Ich sage, f habe kompaktes Komplement bezüglich A , wenn $I \times M \setminus f(I \times A)$ relativ kompakt in $I \times M$ liegt. Für die Anwendung in Proposition 8.8 genügt folgende Aussage über die Fortsetzbarkeit von Isotopien:

Lemma. Sei $A \underset{\text{abg}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} M$, $f: I \times U \rightarrow I \times M$ eine äquivariante, differenzierbare Isotopie offener Einbettungen mit kompaktem Komplement. Dann gibt es eine äquivariante differenzierbare Isotopie $g: I \times M \rightarrow I \times M$ von Automorphismen mit $g = f$ nahe $I \times A$. 8.6

BEWEIS, vgl. [Hirsch], Kapitel 8. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins läßt sich ein konditioniertes, den Parameter erhaltendes Vektorfeld $v: I \times M \rightarrow TI \times TM$ konstruieren, so daß $\frac{\partial f}{\partial t} = v \circ f$ nahe $I \times A$ gilt. Konditioniert heißt in diesem Fall $\exists \varepsilon > 0 \forall t < \varepsilon, x \in M: \text{pr}_2 \circ v(t, x) = 0 \in TM$, und parametererhaltend bedeutet $\text{pr}_1 \circ v = \frac{\partial}{\partial t} \in TI$. Setze v durch den konstanten Wert $(\frac{\partial}{\partial t}, 0) \in T\mathbb{R} \times TM$ auf $\mathbb{R} \times M$ fort.

Zu jedem $x \in M$ existiert genau eine Kurve $c_x: [0, r_x[\rightarrow M$, so daß $c_x(0) = x$ und $\dot{c}(t) = \text{pr}_2 \circ v(t, c_x(t))$ gilt und $r_x \in [0, \infty]$ maximal ist. Für $x \in A$ ist $r_x = \infty$, denn $c_x(t) = \text{pr}_2 \circ f(t, x)$, und für $x \in M \setminus A$ ist $r_x = \infty$, denn c_x verläuft ganz in dem Kompaktum $\text{cl}(\text{pr}_2(I \times M \setminus f(I \times A)))$. $g(t, x) := c_x(t)$ definiert dann eine Diffeotopie wie gewünscht. \square

BEMERKUNG. Dieses Lemma gilt auch unter der folgenden, schwächeren Voraussetzung: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} M$ und $f: I \times U \rightarrow I \times M$ eine differenzierbare Isotopie offener Einbettungen. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von U und ϑ eine riemannsche Metrik auf M . $\text{cl}(\text{pr}_2(I \times M \setminus f(I \times A)))$ sei als metrischer Raum vollständig, und $f|_{U \setminus A}$ sei beschränkt, soll heißen: $\exists b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \forall \tau \in I, u \in U \setminus A: \|\text{pr}_2(\frac{\partial f}{\partial t}(\tau, u))\| \leq b$. 8.7

FORTSETZBARKEIT VON Q-ISOTOPIEN

Proposition. 8.8

(Vr) Auf jeder Vr-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} V & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ existiert eine Q -Isotopie h .

(St) Auf jeder St-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ existiert eine Q -Isotopie h .

(Sd) Auf jeder Sd-Isotopie-Matrix $(\Delta \ \varphi)_I$ existiert eine Q -Isotopie f .

(Vb) Sei $E \rightarrow B$ ein äquivariantes Vektorbündel, $A \underset{\text{abg}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} B$ und

$$\begin{array}{ccc} I \times H \backslash E|_{H \backslash U} & \xrightarrow{h} & I \times H \backslash E \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times H \backslash U & \xrightarrow{\bar{h}} & I \times H \backslash B \end{array}$$

eine Q -Isotopie offener Einbettungen auf einer E enthaltenden Vb-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} E & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$, so daß \bar{h} bezüglich $H \backslash A$ kompaktes Komplement besitzt.

Dann existiert auf derselben Matrix eine Q -Isotopie $\tilde{h}: I \times H \backslash E \rightarrow I \times H \backslash E$ von Automorphismen mit $\tilde{h} = h$ nahe $H \backslash E|_{H \backslash A}$.

(Mf) Sei $\begin{pmatrix} M & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ eine Mf-Isotopie-Matrix und $A \underset{\text{abg}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} M$. Auf dieser Matrix sei $h: I \times H \backslash U \rightarrow I \times H \backslash M$ eine Q -Isotopie offener Einbettungen mit bezüglich $H \backslash A$ kompaktem Komplement. Dann existiert auf derselben Matrix eine Q -Isotopie $\tilde{h}: I \times H \backslash M \rightarrow I \times H \backslash M$ von Automorphismen mit $\tilde{h} = h$ nahe $H \backslash A$.

BEWEISSKIZZE, vgl. die Lemmata 4.18 und 8.3 sowie die Existenzaussagen über die Quotientenstrukturen. Die Aussagen seien für Matrizen der Länge höchstens $l - 1$ bewiesen. Die Ausgangsmatrizen haben nun die Länge l .

zu (Vr): Auf der Mf-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} S(V) & \text{res}_{S(V)}(\psi) & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ der Länge $l - 1$ existiert nach Induktionsannahme (Mf) mit $A = \emptyset$ eine Q -Isotopie

$$\hat{h}: I \times K \backslash S(V) \longrightarrow I \times K \backslash S(V)$$

von Automorphismen. Die kegelförmige Fortsetzung h auf $I \times K \backslash V$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(St) und (Sd) verlaufen wie üblich.

zu (Vb): Schreibe wie üblich $E \cong R \times_{\text{Aut}(F)} F$. Sei \mathfrak{s} der Scheibentyp von F . Dann enthält f die St- Q -Isotopie $f^{\mathfrak{s}}$ und diese enthält ihrerseits die Vr- Q -Isotopie f^F . h_t schreibt sich nach Definition als $g_t \times_{\text{Aut}(F)/K} f_t^F$, wobei

$$\begin{array}{ccc} I \times H \backslash R|_{H \backslash U} & \xrightarrow{g} & I \times H \backslash R \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times H \backslash U & \xrightarrow{\bar{h}} & I \times H \backslash U \end{array}$$

eine Isotopie von Prinzipalbündeln ist. Insbesondere ist g eine differenzierbare Isotopie offener Einbettungen mit bezüglich $H \setminus R|_{H \setminus A}$ kompaktem Komplement, da \bar{h} eine differenzierbare Isotopie offener Einbettungen mit bezüglich $H \setminus A$ kompaktem Komplement ist und die Fasern von $H \setminus R \rightarrow H \setminus B$ kompakt sind.

Wähle \tilde{g} gemäß Lemma 8.6, und zwar $G/H \times \text{Aut}(V)/K$ -äquivariant. Dann definiert $\tilde{h}_t := \tilde{g}_t \times_{\text{Aut}(F)/K} f_t^F$ eine Q-Isotopie \tilde{h} wie gewünscht.

zu (Mf): Sei \mathfrak{s} das oBdA einzige minimale Element in $\Delta(M)$ und

$$\begin{array}{ccc} I \times H \setminus NU_{\mathfrak{s}} & \xrightarrow{h^{\mathfrak{s}}} & I \times H \setminus M_{\mathfrak{s}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times H \setminus U_{\mathfrak{s}} & \xrightarrow{h|_{\cdot}} & I \times H \setminus M_{\mathfrak{s}} \end{array} \quad (\text{b})$$

die durch (b) definierte Vb-Q-Isotopie. Die Abbildung $h^{\mathfrak{s}}$ der Totalräume ist insbesondere eine topologische Isotopie offener Einbettungen, da dies wegen (b) nahe dem \mathfrak{s} -Stratum gilt und $h^{\mathfrak{s}}$ $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant ist.

Da h bezüglich $H \setminus A$ kompaktes Komplement besitzt, h die Strata respektiert und $H \setminus M_{\mathfrak{s}}$ in $H \setminus M$ abgeschlossen ist, folgt, daß die Abbildung $h|_{\cdot}$ der Basen aus (b) bezüglich $H \setminus A_{\mathfrak{s}}$ kompaktes Komplement besitzt. Nach (Vb) existiert daher eine Fortsetzung $\widetilde{h^{\mathfrak{s}}}$ auf ganz $I \times H \setminus NM_{\mathfrak{s}}$. Setze

$$h' := \begin{cases} h & \text{nahe } H \setminus A \\ \frac{h}{\psi_{\mathfrak{s}} \circ \widetilde{h^{\mathfrak{s}}} \circ \text{id}_I \times \psi_{\mathfrak{s}}^0} & \text{nahe } H \setminus NM_{\mathfrak{s}}. \end{cases}$$

Sei $H \setminus V$ der Definitionsbereich von h' und B eine in V enthaltene abgeschlossene Umgebung von $A \cup X$. Die Einschränkung

$$I \times H \setminus V \setminus V_{\mathfrak{s}} \longrightarrow I \times H \setminus M \setminus M_{\mathfrak{s}}$$

von h' ist eine Mf-Q-Isotopie offener Einbettungen mit bezüglich $H \setminus B \setminus B_{\mathfrak{s}}$ kompaktem Komplement. Da sich durch Entfernen des tiefsten Stratums aus M die Länge des Scheibendiagramms verringert, existiert nach Induktionsannahme (Mf) eine Mf-Q-Isotopie

$$k: I \times H \setminus M \setminus M_{\mathfrak{s}} \longrightarrow I \times H \setminus M \setminus M_{\mathfrak{s}}$$

von Automorphismen mit $k = h'$ nahe $H \setminus B \setminus B_{\mathfrak{s}}$. Das durch

$$\tilde{h} := \begin{cases} k & \text{auf } H \setminus M \setminus M_{\mathfrak{s}} \\ h' & \text{nahe } H \setminus B \end{cases}$$

definierte \tilde{h} hat nun die gewünschten Eigenschaften. \square

(Vr), (St) und (Sd) ließen sich zu Fortsetzungsaussagen verschärfen.

BEMERKUNG. Auf dem Niveau der Objekte lassen sich Isotopien mit analogen Fortsetzungseigenschaften definieren, deren Quotienten Q-Isotopien sind. Allerdings sind dies im Falle der äquivarianten Vektorräume keine Isotopien euklidischer Vektorräume, im Falle der äquivarianten Vektorbündel keine Isotopien riemannscher Vektorbündel und im Falle der äquivarianten Mannigfaltigkeiten keine differenzierbaren Isotopien.

Isotopien von Quotientenstrukturen

Eine Quotientenstruktur auf dem Anfangsstadium einer Isotopie-Matrix kann mittels einer Q-Isotopie auf das Endstadium übertragen werden. Die für Länge $l-1$ definierte übertragene Sd-Quotientenstruktur $f_1^*(\mathcal{V})$ wird in den Aussagen für Länge l bereits verwendet:

8.9 Lemma und Definition. φ_0, φ_1 und ψ_0, ψ_1 bezeichnen stets Anfangs- und Endstadium der Ts-Isotopien φ und ψ .

(Vr) Zu einer Q-Isotopie auf einer Vr-Isotopie-Matrix $(V \ \psi)_I$ und einer Quotientenstruktur \mathcal{V} des Anfangsstadiums $(V \ \psi^0)$ existiert genau eine Quotientenstruktur $h_1^*\mathcal{V}$ des Endstadiums $(V \ \psi^1)$, so daß

$$(K \setminus V, h_1^*\mathcal{V}) \xrightarrow{h_1} (K \setminus V, \mathcal{V}) \quad (\#)$$

ein Isomorphismus euklidischer Vektorräume ist. Heißt die h unterliegende Sd-Q-Isotopie f und die \mathcal{V} unterliegende Sd-Quotientenstruktur \mathcal{W} , so liegt $h_1^*\mathcal{V}$ über $f_1^*\mathcal{W}$.

(St) Zu einer St-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ und einer St-Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi^0 & \mathcal{V} \\ \Delta & \varphi^0 & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ existiert genau eine St-Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{s} & \psi^1 & h_1^*\mathcal{V} \\ \Delta & \varphi^1 & h_1^*\mathcal{W} \end{pmatrix}$, so daß für jedes $V \in \mathfrak{s}$ die Isomorphie (#) gilt.

(Sd) Zu einer Sd-Isotopie-Matrix $(\Delta \ \varphi \ f)_I$ und einer Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi^0 \ \mathcal{V})$ existiert genau eine Sd-Matrix $(\Delta \ \varphi^1 \ f_1^*\mathcal{V})$, so daß für jedes $V \in \mathfrak{s} \in \Delta$ die Isomorphie (#) gilt.

(Vb) Zu einer Vb-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} E & \psi & f \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ und einer Vb-Matrix $\begin{pmatrix} E & \psi^0 & \mathcal{B} \\ \Delta & \varphi^0 & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ existiert genau eine Quotientenstruktur $f_1^*\mathcal{B}$ auf $\begin{pmatrix} E & \psi^1 \\ \Delta & \varphi^1 \end{pmatrix}_{f_1^*\mathcal{V}}$. Eine Q-Isotopie $h: I \times H \setminus E|_{H \setminus U} \longrightarrow I \times H \setminus E$ auf $\begin{pmatrix} E & \psi \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ induziert einen faserweisen Isomorphismus riemannscher Vektorbündel

$$h_1: (H \setminus E|_{H \setminus U}, (f_1^*\mathcal{B})|_{..}) \longrightarrow (H \setminus E, \mathcal{B}).$$

(Mf) Zu einer Mf-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ und einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi^0 & \mathcal{D} \\ \Delta & \varphi^0 & \mathcal{V} \end{pmatrix}$ existiert genau eine Quotientenstruktur $f_1^*\mathcal{D}$ auf $\begin{pmatrix} M & \psi^1 & \\ \Delta & \varphi^1 & f_1^*\mathcal{V} \end{pmatrix}$. Eine Q-Isotopie $h: I \times H \setminus U \longrightarrow I \times H \setminus M$ auf $\begin{pmatrix} M & \psi & \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ induziert eine differenzierbare Abbildung

$$h_1: (H \setminus U, (f_1^*\mathcal{D})|..) \longrightarrow (H \setminus M, \mathcal{D}).$$

BEWEIS. Da h_1 ein Homöomorphismus ist, ist bei (Vr) lediglich zu zeigen, daß die durch (§) definierte Struktur $h_1^*\mathcal{V}$ eines euklidischen Vektorraums auf $K \setminus V$ eine über $f_1^*\mathcal{W}$ liegende Quotientenstruktur ist. Die Eigenschaften (L1) bis (L5) aus Lemma 5.5 für $h_1^*\mathcal{V}$ folgen aber aus den Eigenschaften (L1) bis (L5) für \mathcal{V} und (I1) bis (I5) für h (siehe Definition 8.5).

Bei (St) bis (Mf) ergeben die definitionsgemäßen Eigenschaften der Q-Isotopien und der Quotientenstrukturen mühelos die behaupteten Eigenschaften der übertragenen Quotientenstrukturen. \square

BEMERKUNGEN.

(a) Ist in (Mf) h eine Q-Isotopie offener Einbettungen, so ist ihr Quotient

$$h_1: (H \setminus M, (f_1^*\mathcal{D})|..) \longrightarrow (H \setminus M, \mathcal{D})$$

eine differenzierbare offene Einbettung. Ist h sogar eine Q-Isotopie von Automorphismen, so ist $f_1^*\mathcal{D}$ durch „ $h_1: (H \setminus M, f_1^*\mathcal{D}) \longrightarrow (H \setminus M, \mathcal{D})$ ist ein Diffeomorphismus“ charakterisiert.

(b) Analoges gilt in (Vb).

(c) In Lemma und Definition ließe sich der Zeitpunkt 1 durch einen beliebigen Zeitpunkt $t \in I$ ersetzen.

ISOTOPIEKLASSEN VON QUOTIENTENSTRUKTUREN

Eine Mf-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi & h \\ \Delta & \varphi & f \end{pmatrix}_I$ heißt eine Isotopie von einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi^0 & \mathcal{D}^0 \\ \Delta & \varphi^0 & \mathcal{V}^0 \end{pmatrix}$ nach einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} M & \psi^1 & \mathcal{D}^1 \\ \Delta & \varphi^1 & \mathcal{V}^1 \end{pmatrix}$, wenn φ^0, φ^1 und ψ^0, ψ^1 Anfangs- und Endstadium von φ und ψ sind, sowie $\mathcal{V}^1 = f_1^*\mathcal{V}^0$ und $\mathcal{D}^1 = f_1^*\mathcal{D}^0$ gilt. \mathcal{D}^1 heißt dann isotop zu \mathcal{D}^0 ; $[\mathcal{D}^0]$ bezeichne die Isotopieklasse von \mathcal{D}^0 . Verlangt man, daß ψ, φ oder f konstant sind, erhält man feinere Isotopieklassen. Für die anderen Sorten und die schwächeren Besetzungen von Matrizen sind die Definitionen der Isotopien offensichtlich.

8.10 Lemma.

(Sd) Seien $(\Delta \ \varphi^0 \ \nu^0)$ und $(\Delta \ \varphi^1)$ Sd-Matrizen. Dann existiert auf $(\Delta \ \varphi^1)$ eine zu ν^0 isotope Quotientenstruktur ν^1 .

Seien nun $(\Delta \ \varphi^0 \ \nu^0)$ und $(\Delta \ \varphi^1 \ \nu^1)$ isotope Sd-Matrizen.

(Vr) Seien $\begin{pmatrix} V & \psi^0 & \mathcal{W}^0 \\ \Delta & \varphi^0 & \nu^0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} V & \psi^1 \\ \Delta & \varphi^1 \ \nu^1 \end{pmatrix}$ Vr-Matrizen. Dann gibt es eine zu \mathcal{W}^0 isotope Quotientenstruktur \mathcal{W}^1 auf $\begin{pmatrix} V & \psi^1 \\ \Delta & \varphi^1 \ \nu^1 \end{pmatrix}$. Zwei solche Quotientenstrukturen \mathcal{W}^1 und $\mathcal{W}^{1'}$ sind durch eine Q-Isotopie h auf der konstanten Vr-Isotopie-Matrix $\begin{pmatrix} V & \text{id}_I \times \psi^1 \\ \Delta & \text{id}_I \times \varphi^1 \ \text{id}_I \times \text{id}_\Delta \end{pmatrix}$ isotop.

(St) Gleiches gilt für einen Scheibentyp s anstelle des äquivarianten Vektorraums V .

(Vb) Seien ψ_0 und ψ_1 über φ_0 bzw. φ_1 liegende Tubensysteme eines äquivarianten Vektorbündels E mit kompakter Basis. Dann ist die eindeutig existierende Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} E & \psi^0 \\ \Delta & \varphi^0 \ \nu^0 \end{pmatrix}$ isotop zu der eindeutig existierenden Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} E & \psi^1 \\ \Delta & \varphi^1 \ \nu^1 \end{pmatrix}$.

(Mf) Gleiches gilt für eine kompakte äquivariante Mannigfaltigkeit M anstelle des äquivarianten Vektorbündels E .

DER BEWEIS folgt aus Proposition 8.8 und 8.9. \square

BEMERKUNG. Vermutlich gelten die Aussagen (Vb) und (Mf) diese Lemmas auch ohne die Kompaktheitsvoraussetzung. Den Anfang dazu macht die Bemerkung 8.7. Wie die Kompaktheitsbedingungen in Proposition 8.8 durch Beschränktheitsbedingungen zu ersetzen wären, ist allerdings fraglich.

Spricht man statt von Quotientenstrukturen von Qs-Isotopieklassen, so ist wegen der Existenz von Tubensystemen 4.19, der Isotopie von Tubensystemen 8.4 und des gerade bewiesenen Lemmas 8.10 Wahl und Erwähnung von Tubensystemen obsolet: Man kann direkt von einer Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{V}]$ auf einem Scheibendiagramm Δ und von einer über $[\mathcal{V}]$ gelegenen Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{Q}]$ eines über Δ gelegenen Objekts Y sprechen.

8.11 Korollar.

(Sd) Ein Scheibendiagramm ist bezüglich eines jeden Tubensystems linearisierbar, wenn es bezüglich irgendeines Tubensystems linearisierbar ist.

(Vb) Über jeder Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{V}]$ von $\Delta(E)$ liegt genau eine Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{Q}]$ des äquivarianten Vektorbündels E mit kompakter Basis.

(Mf) Über jeder Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{V}]$ von $\Delta(M)$ liegt genau eine Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{Q}]$ der kompakten äquivarianten Mannigfaltigkeit M .

(Mf') Sei M eine kompakte äquivariante Mannigfaltigkeit und $[\mathcal{V}]$ eine Qs-Isotopieklasse von $\Delta(M)$. Dann besitzt M eine ausgezeichnete Qs-Isotopieklasse $[\mathcal{D}]$. Insbesondere besitzt der Quotient $H \setminus M$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, und zu je zwei ausgezeichneten differenzierbaren Strukturen, d. h. zu je zwei $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in [\mathcal{D}]$, gibt es eine mit der Identität startende Isotopie $h: I \times H \setminus M \rightarrow I \times H \setminus M$ von Homöomorphismen mit $\mathcal{D}' = h_1^* \mathcal{D}$.

BEWEIS. (Sd) folgt aus dem entsprechenden Teil des Lemmas 8.10.

(Vb) und (Mf) folgen aus der eindeutigen Existenz von Quotientenstrukturen über einer gegebenen Linearisierung bei äquivarianten Vektorbündeln und äquivarianten Mannigfaltigkeiten (Lemma 6.3 und Satz 7.7) und der diesem Korollar vorangehenden Bemerkung.

(Mf') folgt aus (Mf), da eine Q-Isotopie von Automorphismen insbesondere eine mit der Identität startende Isotopie von Homöomorphismen ist. \square

WARNUNG zu (Sd). Es gibt Scheibendiagramme, die nicht linearisierbar sind. Mir ist 8.12 unbekannt, ob es Scheibendiagramme gibt, die mehrere Qs-Isotopieklassen besitzen.

§9 Produkte

„Produkt“ bezeichnet im folgenden nicht das Produkt im kategoriellen Sinne, sondern eine auf dem mengentheoretischen Produkt kanonisch definierbare Struktur gleicher Art wie auf den Faktoren.

Produkte von Objekten

Das durch $K \times K' \rightarrow O(V \times V')$ definierte Produkt zweier äquivarianter Vektorräume $K \rightarrow O(V)$ und $K' \rightarrow O(V')$ ist wieder ein äquivarianter Vektorraum, der kurz mit $V \times V'$ bezeichnet wird. Das Produkt $a \times b: V \times V' \rightarrow W \times W'$ zweier Vr-Morphismen $a: V \rightarrow W$ und $b: V' \rightarrow W'$ ist ein Vr-Morphismus der Produkte.

Das Produkt zweier Scheibentypen kann mittels Repräsentanten definiert werden: $[V] \cdot [V'] := [V \times V']$ ist wieder ein Scheibentyp.

Das elementweise definierte Produkt $\Delta \cdot \Delta' := \{ \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' \mid \mathfrak{s} \in \Delta \wedge \mathfrak{s}' \in \Delta' \}$ zweier Scheibendiagramme und ist wieder ein Scheibendiagramm. Die Inklusion $\Gamma \cdot \Gamma' \hookrightarrow \Delta \cdot \Delta'$ sei das Produkt der Sd-Morphismen $\Gamma \hookrightarrow \Delta$ und $\Gamma' \hookrightarrow \Delta'$.

Das durch $H \times H' \triangleleft G \times G' \rightarrow \text{Aut} \left(\begin{pmatrix} E \times E' \\ \downarrow \\ B \times B' \end{pmatrix} \right)$ definierte Produkt zweier äquivarianter Vektorbündel $H \triangleleft G \rightarrow \text{Aut} \left(\begin{pmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{pmatrix} \right)$ und $H' \triangleleft G' \rightarrow \text{Aut} \left(\begin{pmatrix} E' \\ \downarrow \\ B' \end{pmatrix} \right)$ ist wieder

ein äquivariantes Vektorbündel, das kurz mit $E \times E'$ bezeichnet wird. Das Produkt $f \times g: E \times E' \rightarrow \tilde{E} \times \tilde{E}'$ zweier Vb-Morphismen $f: E \rightarrow \tilde{E}$ und $g: E' \rightarrow \tilde{E}'$ ist ein Vb-Morphismus der Produkte.

Das durch $H \times H' \triangleleft G \times G' \rightarrow \text{Diffeo}(M \times M')$ definierte Produkt zweier äquivarianter Mannigfaltigkeiten $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ und $H' \triangleleft G' \rightarrow \text{Diffeo}(M')$ ist wieder eine äquivariante Mannigfaltigkeit, die kurz mit $M \times M'$ bezeichnet wird. Da die Morphismen äquivarianter Mannigfaltigkeiten (ohne Tubensysteme!) kaum eine Rolle spielen, lasse ich offen, ob das Produkt $f \times g: M \times M' \rightarrow \tilde{M} \times \tilde{M}'$ zweier Mf-Morphismen $f: M \rightarrow \tilde{M}$ und $g: M' \rightarrow \tilde{M}'$ ein Mf-Morphismus der Produkte ist.

Der Orbit von $(x, x') \in M \times M'$ ist $Hx \times H'x'$, sein Scheibentyp ist das Produkt der jeweiligen Scheibentypen, das Scheibendiagramm von $M \times M'$ ist $\Delta(M) \cdot \Delta(M')$. Sei $t \in \Delta(M \times M')$, und $(s_1, s'_1), \dots, (s_k, s'_k)$ seien alle Elemente aus $\Delta(M) \times \Delta(M')$ mit $s_j \cdot s'_j = t$. Dann ist $(M \times M')_t$ die topologische Summe der $M_{s_j} \times M_{s'_j}$, $1 \leq j \leq k$. Die Scheibentypenstratifizierung von $M \times M'$ stimmt folglich lokal mit der Stratifizierung $\{M_s \times M'_{s'} \mid s \in \Delta(M) \wedge s' \in \Delta(M')\}$ überein, global ist die zweite Stratifizierung feiner oder gleich der ersten; vgl. Lemma 2.13.

STRUKTUR VON St

9.1 Lemma. *Die Menge St aller Scheibentypen hat die Mächtigkeit \aleph_0 .*

BEWEIS. Seien K und K' Untergruppen von $O(n)$, die auf \mathbb{R}^n ohne triviale Summanden operieren. Die äquivarianten Vektorräume $K \rightarrow O(n)$ und $K' \rightarrow O(n)$ haben genau dann denselben Scheibentyp, wenn die K und K' in $O(n)$ zu einander konjugiert sind.

Auf diese Weise entspricht, da jeder Scheibentyp einen Repräsentanten mit \mathbb{R}^n , n geeignet, als unterliegendem euklidischen Vektorraum besitzt, die Menge der Scheibentypen umkehrbar eindeutig der Menge der ohne trivialen Summanden operierenden Konjugationsklassen von Untergruppen von $O(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Diese Menge ist abzählbar unendlich, da aus dem Satz C.1 von Montgomery / Zippin folgt, daß eine kompakte Liegruppe nur abzählbar viele Konjugationsklassen von Lie-Untergruppen haben kann. \square

Durch die oben definierte Multiplikation $\cdot: \text{St} \times \text{St} \rightarrow \text{St}$ wird St zu einem abelschen Monoid mit $\epsilon := [\{1\} \rightarrow O(0)]$ als neutralem Element. Es gilt die Kürzungsregel $\tau \cdot t = s \cdot t \Rightarrow \tau = s$. Desweiteren gelten die Teilbarkeitsaussagen aus Anhang A, insbesondere besitzt jeder Scheibentyp eine (eindeutige) Primfaktorzerlegung (Korollar A.10).

Die Relation \geq aus 2.8 ist eine Teilordnung auf St mit ϵ als dem größten Element. Multiplikation und Teilordnung sind miteinander verträglich: $\tau \cdot t \geq s \cdot t \Leftrightarrow \tau \geq s$. Die Dimensionsabbildung $\text{St} \rightarrow \mathbb{N} \setminus 0$, $[V] \mapsto \dim V$, ist schließlich ein surjektiver, ordnungsumkehrender Morphismus von Monoiden.

Produkte von Tubensystemen

Seien $(V \ \psi)$ und $(V' \ \psi')$ Vr-Matrizen. Die Einheitssphäre des Produkts $V \times V'$ steht in keinem einfachen Verhältnis zu den Einheitssphären der Faktoren. Deshalb läßt sich aus ψ und ψ' kein Tubensystem von $V \times V'$ bilden — zumindest nicht auf naheliegende Weise.

Ich ändere deshalb die Definition der Tubensysteme ab: Sei $\begin{pmatrix} V \\ \Delta \ \varphi \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix der Länge l und $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ die Primfaktorzerlegung des äquivarianten Vektorraums V . Für $1 \leq j \leq k$ sei ψ_j ein Tubensystem (im alten Sinne) des äquivarianten Vektorraums V_j . Dann heißt $\psi_1 \times \psi_2 \times \cdots \times \psi_k$, definiert wie im folgenden Absatz 9.2, ein Tubensystem (im neuen Sinne) auf $\begin{pmatrix} V \\ \Delta \ \varphi \end{pmatrix}$. Die anderen Teile der Definition von Tubensystemen bleiben unverändert.

Alle Aussagen und Beweise dieses Kapitels gelten auch für die neuen Tubensysteme, außer, daß bei äquivarianten Vektorräumen hin und wieder die Primfaktoren einzeln betrachtet werden müssen.

Die Definition des Produkts von Tubensystemen erfolgt rekursiv über die Länge. Gleichzeitig wird die Aussage formuliert, daß das Produkt von Tubensystemen ein Tubensystem des Produkts der Objekte ist, welches über dem Produkt der Tubensysteme der jeweiligen Scheibendiagramme liegt. 9.2

Der triviale Rekursionsanfang entfällt. Sei deshalb $Ob = Vr, Vb$ oder Mf , und $\begin{pmatrix} Y \ \psi \\ \Delta \ \varphi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} Y' \ \psi' \\ \Delta' \ \varphi' \end{pmatrix}$ seien Ob-Matrizen mit $\varphi|_{\Delta \cap \Delta'} = \varphi'|_{\Delta \cap \Delta'}$. Sei $t \in \Delta \cdot \Delta'$ und $s \in \Delta, s' \in \Delta'$ mit $s \cdot s' = t$. Identifiziere $N(Y_s \times Y_{s'})$ mit $NY_s \times NY_{s'}$. Dann ist

$$NY_s \times NY_{s'} \supset \xrightarrow{\psi_s \times \psi'_{s'}} Y \times Y'$$

zusammen mit dem Produkt der riemannschen Metriken eine Tube von $Y_s \times Y_{s'}$ in $Y \times Y'$. Definiere die Tube χ_t von $(Y \times Y')_t$ durch $\chi_t|_{NY_s \times NY_{s'}} = \psi_s \times \psi'_{s'}$. Die Familie $\psi \times \psi' := (\chi_t)_{t \in \Delta \cdot \Delta'}$ ist ein Tubensystem auf $\begin{pmatrix} Y \times Y' \\ \Delta \cdot \Delta' \ \varphi \cdot \varphi' \end{pmatrix}$, welches das Produkt von ψ und ψ' heiße.

Der Übergang von äquivarianten Vektorräumen zu Scheibentypen und Scheibendiagrammen erfolgt wie üblich; bei letzteren werde das Produkt von Tubensystemen ψ und ψ' mit $\psi \cdot \psi'$ bezeichnet.

Produkte von Quotientenstrukturen

Aus dem selben Grund wie bei Tubensystemen ändere ich die Definition der Quotientenstrukturen ab: Sei $\begin{pmatrix} V \ \psi \\ \Delta \ \varphi \ \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine Vr-Matrix der Länge l und $V = V_1 \times \cdots \times V_k$ die Primfaktorzerlegung des äquivarianten Vektorraums V . Für $1 \leq j \leq k$ sei \mathcal{V}_j

eine Quotientenstruktur (im alten Sinne) auf $\left(\begin{array}{ccc} V_j & \psi_j & \\ \text{St}_{>[V_j]} & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{W}|_{\cdot} \end{array} \right)$. Dann heißt $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_k$, definiert wie im folgende Absatz 9.3, eine Quotientenstruktur (im neuen Sinne) auf $\left(\begin{array}{ccc} V & \psi & \\ \Delta & \varphi & \mathcal{W} \end{array} \right)$. Die anderen Teile der Definition von Quotientenstrukturen bleiben unverändert.

Alle Aussagen und Beweise dieses Kapitels gelten auch für die neuen Quotientenstrukturen, außer, daß bei äquivarianten Vektorräumen hin und wieder die Primfaktoren einzeln betrachtet werden müssen.

9.3 Die Definition des Produkts von Quotientenstrukturen erfolgt rekursiv über die Länge. Gleichzeitig wird die Aussage formuliert, daß das Produkt von Quotientenstrukturen eine Quotientenstruktur auf den Produkten der zugrunde liegenden Matrizen ist.

Der triviale Rekursionsanfang entfällt. Sei wiederum $\text{Ob} = \text{Vr}$, Vb oder Mf , und $\left(\begin{array}{ccc} Y & \psi & \mathcal{Q} \\ \Delta & \varphi & \mathcal{V} \end{array} \right)$ und $\left(\begin{array}{ccc} Y' & \psi' & \mathcal{Q}' \\ \Delta' & \varphi' & \mathcal{V}' \end{array} \right)$ seien Ob -Matrizen mit $\varphi|_{\Delta \cap \Delta'} = \varphi'|_{\Delta \cap \Delta'}$ und $\mathcal{V}|_{\Delta \cap \Delta'} = \mathcal{V}'|_{\Delta \cap \Delta'}$. Identifiziere den Orbitraum des Produkts mit dem Produkt der Orbiträume. Die euklidische bzw. riemannsche bzw. differenzierbare Struktur $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$ auf $H \setminus Y \times H' \setminus Y'$ ist dann eine Quotientenstruktur auf $\left(\begin{array}{ccc} Y \times Y' & \psi \times \psi' & \\ \Delta \cdot \Delta' & \varphi \cdot \varphi' & \mathcal{V} \cdot \mathcal{V}' \end{array} \right)$, welche das Produkt von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' heiße.

Der Übergang von äquivarianten Vektorräumen zu Scheibentypen und Scheibendiagrammen erfolgt wie üblich; bei letzteren werde das Produkt von Quotientenstrukturen \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' mit $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}'$ bezeichnet.

ERZEUGNISSE

9.4 Für die Automorphismengruppe des Produkts primer äquivarianter Vektorräume gilt

$$\text{Aut}\left(\prod_{j=1}^k V_j\right) \cong \left(\prod_{j=1}^k \text{Aut}(V_j)\right) \rtimes \{\pi \in \mathfrak{S}_k \mid \forall j: V_{\pi(j)} \cong V_j\}.$$

Sei $(\Delta \quad \varphi \quad \mathcal{V})$ eine Sd-Matrix und $\mathfrak{s} = \prod_{j=1}^k \mathfrak{t}_j$ eine Faktorisierung eines Elementes von Δ . Dann liegt auch jedes \mathfrak{t}_j in Δ . Folglich enthält φ ein Tubensystem $\varphi^{\mathfrak{t}_j}$ von \mathfrak{t}_j , und \mathcal{V} enthält eine Quotientenstruktur $\mathcal{V}^{\mathfrak{t}_j}$ von $(\mathfrak{t}_j \quad \varphi^{\mathfrak{t}_j})$. Für diese gilt $\varphi^{\mathfrak{s}} = \prod_{j=1}^k \varphi^{\mathfrak{t}_j}$ und $\mathcal{V}^{\mathfrak{s}} = \prod_{j=1}^k \mathcal{V}^{\mathfrak{t}_j}$. Eine Sd-Matrix $(\Delta \quad \varphi \quad \mathcal{V})$ ist daher durch die Tubensysteme und Quotientenstrukturen der in Δ vorkommenden primen Scheibentypen bereits bestimmt.

Sei umgekehrt P eine Menge primer Scheibentypen, die mit einem Scheibentypen auch jeden größeren, primen Scheibentypen enthält. Dann ist $\langle P \rangle := \{\mathfrak{s}_1 \cdots \mathfrak{s}_n \mid n \in \mathbb{N}, \mathfrak{s}_j \in P\}$ das von P erzeugte multiplikativ abgeschlossene Scheibendiagramm.

Lemma. Sei P wie oben, und für jedes $s \in P$ sei eine Sd -Matrix $(St_{\geq s} \quad \varphi^s \quad \mathcal{V}^s)$ gegeben, so daß für $t \in P$ mit $t < s$ gilt: $\varphi^t = \varphi^s|_{\geq t}$ und $\mathcal{V}^t = \mathcal{V}^s|_{\geq t}$. Dann gibt es genau ein gemeinsame Fortsetzung $(\langle P \rangle \quad \psi \quad \mathcal{W})$. 9.5

BEWEISSKIZZE. Definiere Tubensystem und Quotientenstruktur eines Elementes von $\langle P \rangle$ als das Produkt der Tubensysteme bzw. der Quotientenstrukturen seiner Primfaktoren, die ja in P enthalten sind. (L1) bis (L3) aus Lemma 5.5 sind offensichtlich, für (L4) genügt der Hinweis auf 9.4, (L5) ist zumindest plausibel und wird nicht vorge-rechnet. \square

BEISPIELE. P ist genau dann leer, wenn $\langle P \rangle = \{\epsilon\}$ ist. P ist einelementig, wenn es eine treue Darstellung σ einer nichttrivialen Gruppe gibt, die außerhalb des Nullpunkts homogen operiert, und $P = \{[\sigma]\}$ ist. Das Erzeugnis $\langle P \rangle$ ist dann die Menge aller Potenzen von $[\sigma]$. Die entscheidende Anwendung erfährt Lemma 9.5 jedoch in Proposition II 5.8.

VERTRÄGLICHKEIT MIT MORPHISMEN

9.6

Nach der neuen Definition von Tubensystemen und Quotientenstrukturen wäre es sinnvoll, die Inklusion von Faktoren und die Projektion auf Faktoren als Vr-Morphismen zuzulassen. Dies ermöglichte eine Erweiterung des Ob- und (Ob, Ts)-Morphismusbegriffs für alle Objektsorten.

Anhang A Primfaktorzerlegung von Darstellungen

Zum einen werden zulässige Partitionen der Indexmenge eines Produktes von Mengen betrachtet, zum anderen Faktorisierungen orthogonaler Darstellungen kompakter Liegruppen. Das Hauptresultat A.9 folgt aus der in Proposition A.8 hergestellten Verbindung beider.

Partitionen

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von Mengen und M eine Teilmenge des Produktes $\prod_{i \in I} X_i$. Für $A \subset B \subset I$ sei $X_A := \prod_{i \in A} X_i$ und $\pi_A^B: X_B \rightarrow X_A$ die kanonische Projektion sowie $M^A := \pi_A^I(M)$. Die induzierte Abbildung $M^B \rightarrow M^A$ ist stets surjektiv.

Eine Teilmenge \mathcal{A} der Potenzmenge von I heißt eine Partition von I , wenn $I = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ und $\emptyset \notin \mathcal{A}$ gilt. Die Menge der Partitionen von I ist teilgeordnet durch die Festsetzung $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} : \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \exists B \in \mathcal{B}: A \subset B$. Die Partition $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \setminus \emptyset$

heie der Schnitt von \mathcal{A} und \mathcal{B} . Es gilt $M \subset \prod_{A \in \mathcal{A}} M^A$. \mathcal{A} heie zulässig, wenn auch $M \supset \prod_{A \in \mathcal{A}} M^A$ gilt. M ist dann „bezüglich \mathcal{A} “ ein Produkt.

A.1 Lemma. *Der Schnitt zweier zulässiger Partitionen ist zulässig.*

BEWEIS. Sei \mathcal{B} eine Partition und A eine Teilmenge von I . Setze $\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B} \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ und $J := \bigcup \mathcal{C}$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\iota} & \prod_{B \in \mathcal{B}} M^B & \longrightarrow & X_I \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_J^I \\
 M^J & \xrightarrow{\iota_J} & \prod_{B \in \mathcal{C}} M^B & \longrightarrow & X_J \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_A^J \\
 M^A & \xrightarrow{\iota_A} & \prod_{B \in \mathcal{C}} M^{A \cap B} & \longrightarrow & X_A.
 \end{array}$$

Der abwärts gerichtete Pfeil unten Mitte ist surjektiv, da er gleich dem Produkt der Abbildungen $M^B \rightarrow M^{A \cap B}$ ist. Ist nun \mathcal{B} zulässig, so ist ι surjektiv, woraus mittels Diagrammjagd die Surjektivität auch von ι_J und ι_A folgt.

Sei nun \mathcal{A} eine weitere Partition von I . Betrachte

$$M \xrightarrow{\iota'} \prod_{A \in \mathcal{A}} M^A \xrightarrow{\iota''} \prod_{A \in \mathcal{A}} \prod_{B \in \mathcal{B}, A \cap B \neq \emptyset} M^{A \cap B} = \prod_{C \in \text{Schnitt von } \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B}} M^C. \quad (\clubsuit)$$

Da ι'' das Produkt der ι_A ist, folgt aus der Zulässigkeit von \mathcal{B} die Surjektivität von ι'' . Ist auch \mathcal{A} zulässig, so ist auch ι' surjektiv. Insgesamt zeigt (\clubsuit) dann aber die Zulässigkeit des Schnitts von \mathcal{A} und \mathcal{B} . \square

A.2 Proposition. *Es gibt genau eine zulässige Partition, die jede zulässige Partition verfeinert.*

BEWEIS. Der Schnitt über alle zulässigen Partitionen verfeinert jede und ist, da es nur endlich viele Partitionen gibt, nach Lemma A.1 zulässig. \square

PUNKTIERTE MENGEN

Seien $o_i \in X_i$ Basispunkte mit $(o_i)_i \in M$. Fasse X_A via der kanonischen Inklusion ι_A auch als Teilmenge von X_I auf und setze $M_A := \iota_A^{-1}(M) = M \cap X_A$.

Lemma. Für eine beliebige Partition \mathcal{A} gilt:

A.3

$$(1) \prod_{A \in \mathcal{A}} M_A \stackrel{(i)}{\subset} M \stackrel{(ii)}{\subset} \prod_{A \in \mathcal{A}} M^A \text{ und } \forall A: M_A \stackrel{(iii)}{\subset} M^A.$$

(2) \mathcal{A} ist zulässig

\Leftrightarrow Bei (i), (ii) oder (iii) besteht Gleichheit

\Leftrightarrow Bei (i), (ii) und (iii) besteht Gleichheit.

DER BEWEIS ist leicht. \square

Faktorisierungen

Gegenstand sind im folgenden Operationen von Gruppen auf abelschen Gruppen durch Automorphismen. 1 bezeichne jeweils das neutrale Element der Gruppe, 0 das neutrale Element der abelschen Gruppe, ε die triviale Operation $\{1\} \times \{0\} \rightarrow \{0\}$.

Betrachte Produkte über endlichen Indexmengen: $\prod_j G_j$ bezeichne das Produkt einer Familie $(G_j)_j$ von Gruppen, $\prod_j V_j$ das Produkt einer Familie $(V_j)_j$ abelscher Gruppen. Das Produkt einer Familie $(\sigma_j: G_j \times V_j \rightarrow V_j)_j$ von Operationen ist

$$\begin{aligned} \prod_j \sigma_j : \prod_j G_j \times \prod_j V_j &\longrightarrow \prod_j V_j. \\ ((g_j)_j, (v_j)_j) &\longmapsto (\sigma_j(g_j, v_j))_j \end{aligned}$$

Betrachte umgekehrt endliche Faktorisierungen: Eine endliche Menge F von Untergruppen einer Gruppe G heiÙe eine Faktorisierung von G , wenn G das Produkt der in F genannten Untergruppen ist. Die Faktorisierung heiÙe echt, falls $\{1\} \notin F$. Analoge Definitionen gelten für abelsche Gruppen und später für euklidische Vektorräume.

Ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} G' \times V' & \xrightarrow{\varrho'} & V' \\ f_1 \times f_2 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ G \times V & \xrightarrow{\varrho} & V \end{array}$$

von Operationen heißt die Einschränkung von ϱ auf (G', V') , falls f_1 und f_2 Inklusionen sind. Schreibe für ϱ' auch $\varrho|_{(G', V')}$. Eine endliche Menge F von Einschränkungen einer Operation ϱ heiÙe eine Faktorisierung von ϱ , wenn ϱ das Produkt der in F genannten Einschränkungen ist. Sie heiÙe echt, falls $\varepsilon \notin F$. Sage statt $\sigma \in F$ auch: σ ist ein Faktor von ϱ oder σ teilt ϱ , in Zeichen: $\sigma|\varrho$.

Die Festsetzung $E \leq F : \Leftrightarrow \forall \sigma \in E \exists \tau \in F: \sigma|\tau$ definiert eine Teilordnung auf der Menge der Faktorisierungen von ϱ . Nenne eine von ε verschiedene Operation σ

unteilbar¹, wenn gilt $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_1 \vee \sigma = \sigma_2$; nenne σ prim, wenn gilt $\sigma|\tau_1 \times \tau_2 \Rightarrow \sigma|\tau_1 \vee \sigma|\tau_2$. Offenbar impliziert prim unteilbar.

F_1 bezeichne stets die zu einer Faktorisierung F einer Operation $\varrho: G \times V \rightarrow V$ gehörige Faktorisierung von G und F_2 die zu F gehörige Faktorisierung von V :

$$F_1 := \{ H < G \mid \exists W < V: \varrho|_{(H,W)} \in F \} \quad \text{und} \\ F_2 := \{ W < V \mid \exists H < G: \varrho|_{(H,W)} \in F \}.$$

Die Faktorisierung F_2 ist stets G -invariant. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß sich F bei effektivem ϱ sogar aus F_2 rekonstruieren läßt.

A.4 Sei ϱ eine effektive Operation von G auf V , außerdem F_V eine invariante Faktorisierung von V und W ein Element von F_V . Nenne $G_W := \ker \varrho|_{(G, \prod_{U \in F_V \setminus \{W\}} U)}$ den zu W gehörigen „Nichtkern“ und setze $\varrho_W := \varrho|_{(G_W, W)}$. Sowohl $\text{Aut}(W)$ als auch G und G_W sind in kanonischer Weise Untergruppen von $\text{Aut}(V)$ und es gilt $G_W = G \cap \text{Aut}(W)$.

A.5 Lemma. *Für eine Faktorisierung F einer effektiven Operation $\varrho: G \times V \rightarrow V$ gilt:*

- (1) $G \subset \prod_{W \in F_2} \text{Aut}(W)$.
- (2) Für $(\sigma: H \rightarrow \text{Aut}(W)) \in F$ ist $\sigma = \varrho_W$.
- (3) F ist bereits durch F_2 bestimmt.

DER BEWEIS ist trivial. \square

Exkurs: Kurze exakte Sequenzen

Der Exkurs stellt eine Beziehung zwischen Faktorisierungen und Quotientenbildungen her.

Sei $\varrho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ eine effektive Operation einer Gruppe auf einer abelschen Gruppe, N ein Normalteiler von G und F eine Faktorisierung von $\varrho|_{(N,V)}$. Dann gilt

$$N \setminus V \cong \left(\prod_{W \in F} N_W \right) \setminus \left(\prod_{W \in F} W \right) \cong \prod_{W \in F} (N_W \setminus W).$$

Ist die induzierte Operation $\bar{\varrho}$ von G/N auf $N \setminus V$ wiederum effektiv, so kann von dem zu $N \setminus W$ gehörigen Nichtkern $(G/N)_{N \setminus W} = G/N \cap \text{Bij}(N \setminus W)$ und von dessen Operation $\bar{\varrho}_{N \setminus W}$ auf $N \setminus W$ gesprochen werden.

A.6 Lemma. *Ist die induzierte Operation $\bar{\varrho}$ das Produkt ihrer Einschränkungen $\bar{\varrho}_{N \setminus W}$, $W \in F_2$, so ist die Operation ϱ selbst das Produkt ihrer Einschränkungen ϱ_W , $W \in F_2$.*

¹Der Begriff „irreduzibel“ hat für Darstellungen eine andere Bedeutung als für Elemente von Halbgruppen oder Ringen; ich möchte ihn nur in der ersten Bedeutung verwenden.

BEWEIS. Sei $W \in F_2$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & N_W & \longrightarrow & G_W & & (G/N)_{N \setminus W} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/N & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \prod_{U \in F_V \setminus \{W\}} N_U & & G/G_W & & \prod_{U \in F_V \setminus \{W\}} (G/N)_{N \setminus U} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

kommutiert und hat exakte Zeilen und Spalten. Außerdem existiert die kommutative Ergänzung $G_W \rightarrow (G/N)_{N \setminus W}$, und es ist $N_W = N \cap G_W$. Mittels Diagrammjagd erhält man daraus ein vollständiges kommutatives Gitter kurzer exakter Sequenzen.

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \prod_W N_W & \longrightarrow & \prod_W G_W & \longrightarrow & \prod_W (G/N)_{N \setminus W} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/N & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

erhält man aus der Gleichheit links und rechts und der Existenz des mittleren Pfeils Gleichheit auch in der Mitte. \square

Gebraucht wird dieses Lemma nicht für Satz A.9, sondern für Lemma II 1.8.

Darstellungen

Im folgenden sind mit Gruppen kompakte reelle Liegruppen, mit Vektorräumen endlichdimensionale euklidische Vektorräume, und mit Darstellungen endlichdimensionale orthogonale Darstellungen von Gruppen gemeint. triv_G bezeichne die eindimensionale triviale Darstellung von G .

Sei $\text{Irr}(G, \mathbb{R})$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G . Für irreduzibles α heißt das Erzeugnis V_α der Unterräume

$U \subset V$ mit $\varrho|_{(G,U)} \sim \alpha$ die α -isotypische Komponente einer Darstellung ϱ von G . Definiere $I(\varrho) := \{ \alpha \in \text{Irr}(G, \mathbb{R}) \mid V_\alpha \neq 0 \}$ und für $A \subset I(\varrho)$ $V_A := \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Ab jetzt sei ϱ treu und „ohne“ triviale isotypische Komponente, d.h. mit $V_{\text{triv}_G} = 0$.

A.7 Lemma. Die Menge $\{ V_\alpha \mid \alpha \in I(\varrho) \}$ verfeinert F_2 für jede echte Faktorisierung F von ϱ .

BEWEIS. Für $\alpha \in \text{Irr}(G, \mathbb{R})$ bezeichne r_α die Vielfachheit von α in ϱ , d.h. es ist $\varrho \sim \prod_{\alpha \in I(\varrho)} \alpha^{r_\alpha}$. Sei nun $W \in F_2$ und σ die Darstellung von G auf W . Bezeichne mit s_α die Vielfachheit von α in σ . Dann gilt $r_\alpha \geq s_\alpha$ und $r_\alpha = s_\alpha \Leftrightarrow V_\alpha \subset W$. Der Nichtkern G_W läßt sich durch die Kerne der irreduziblen Darstellungen ausdrücken:

$$G_W = \ker \varrho|_{(G, \prod_{U \in F_2 \setminus \{W\}} U)} = \ker \prod_{\alpha \in I(\varrho)} \alpha^{r_\alpha - s_\alpha} = \bigcap_{\substack{\alpha \in I(\varrho) \\ V_\alpha \not\subset W}} \ker \alpha.$$

Angenommen, es gibt ein $\beta \in I(\varrho)$, so daß die β -isotypische Komponente von V in keinem $W \in F_2$ enthalten ist. Dann folgt $G \subset \ker \beta$ und daraus der Widerspruch $\beta = \text{triv}_G$. \square

A.8 Proposition. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Menge der zulässigen Partitionen von } I(\varrho) & \longleftrightarrow & \text{Menge der echten Faktorisierungen von } \varrho \\ \mathcal{A} & \longmapsto & \{ \varrho_{V_A} \mid A \in \mathcal{A} \} \\ \{ I(\sigma) \mid \sigma \in F \} & \longleftarrow & F \end{array}$$

ist eine ordnungserhaltende Bijektion.

BEWEIS. Die Bezeichnungen von und Aussagen über (punktiierte) Mengen vom Beginn dieses Paragraphen finden Anwendung auf $G \subset \prod_{\alpha \in I(\varrho)} O(V_\alpha)$. Beachte dabei die

Konsistenz des unteren Indizierens:

$$G_A = \iota_A^{-1}(G) = G \cap O(V_A) = G_{V_A}.$$

Sei \mathcal{A} eine beliebige Partition von $I(\varrho)$. Dann ist $\prod_{A \in \mathcal{A}} \varrho_{V_A}$ die Einschränkung von ϱ auf $(\prod_{A \in \mathcal{A}} G_{V_A}, V)$. Nach (2 i) aus Lemma A.3 ist \mathcal{A} genau dann zulässig, wenn $\{ \varrho_{V_A} \mid A \in \mathcal{A} \}$ eine echte Faktorisierung von ϱ ist. Punkt (3) des Lemmas A.5 konstatiert die Injektivität, Lemma A.7 die Surjektivität der Abbildung $\mathcal{A} \mapsto \{ \varrho_{V_A} \mid A \in \mathcal{A} \}$. \square

Die angestrebte Primfaktorzerlegung von Darstellungen lautet nun:

A.9 Satz. Jede treue Darstellung ohne triviale isotypische Komponente ist das Produkt ihrer unteilbaren Faktoren. Diese echte Faktorisierung verfeinert jede andere.

Korollar. Für treue Darstellungen ohne triviale isotypische Komponente sind die Eigenschaften „prim“ und „unteilbar“ äquivalent.

Korollar. Seien ρ, σ und τ treue Darstellungen ohne triviale isotypische Komponente. Sind τ und σ Teiler von ρ , und ist τ eine Einschränkung von σ , so ist τ sogar ein Teiler von σ .

Grobe Scheibentypen

Ich erinnere an die Äquivalenzbegriffe 2.1 für Darstellungen sowie an den wesentlichen Anteil 2.6 einer Darstellung. Nenne einen groben Scheibentypen \mathfrak{s} prim, wenn der wesentliche Anteil σ' eines und damit jedes Repräsentanten $\sigma \in \mathfrak{s}$ prim ist. Da der wesentliche Anteil des Produkts von Darstellungen (A3)-äquivalent zum Produkt der wesentlichen Anteile der Faktoren ist, erhalten wir das

Korollar. Die groben Scheibentypen besitzen eine Primfaktorzerlegung, d.h.: Zu jedem $\mathfrak{s} \in \text{St}$ gibt es genau eine Abbildung $m: \{ \mathfrak{p} \in \text{St} \mid \mathfrak{p} \text{ prim} \} \rightarrow \mathbb{N}$, so daß $\mathfrak{s} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}$ gilt. A.10

BEMERKUNG. Abgesehen von endlichen Produkten, kommutativen Diagrammen und, im Exkurs, exakten Sequenzen wurde nur die Zerlegung von Darstellungen in endlich viele isotypische Komponenten benutzt. Die Ergebnisse sind daher auf andere Kategorien von Darstellungen übertragbar.

Anhang B Faserbündel

Ziel dieses Anhangs ist die Vorstellung einiger Begriffe aus der Theorie der Faserbündel in der in der vorliegenden Arbeit benutzten Form. Bei der Einführung von Faserbündeln über Faserbündeln wird auf eine Gleichbehandlung der vier beteiligten Bündel Wert gelegt. Gemeint sind differenzierbare Faserbündel mit kompakter, lischer Strukturgruppe. Im Vordergrund steht der Formalismus; topologische Schwierigkeiten, die bei allgemeineren Faserbündeln auftreten, bleiben unberührt.

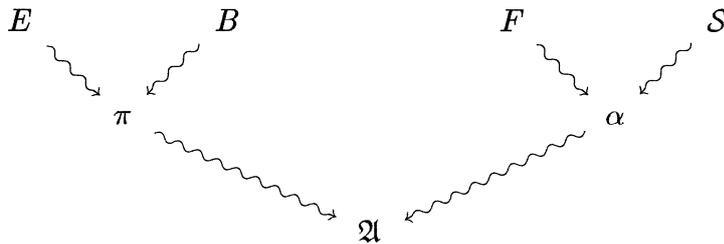
Faserbündel

Sei $\pi: E \rightarrow B$ eine differenzierbare Abbildung und $\alpha: \mathcal{S} \times F \rightarrow F$ eine differenzierbare Operation einer kompakten Liegruppe. Für $U \subset E$ offen heißt ein Diffeomorphismus ϑ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\vartheta} & U \times F \\ \pi|_{\cdot} \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

kommutiert, eine lokale Trivialisierung oder eine Bündelkarte. Seien η und ϑ lokale Trivialisierungen und $g_{\eta\vartheta}: U_\eta \cap U_\vartheta \rightarrow \mathcal{S}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $\eta \circ \vartheta^{-1}(u, f) = (u, \alpha(g_{\eta\vartheta}(u), f))$. Dann heißt $g_{\eta\vartheta}$ eine Übergangsfunktion von η nach ϑ . Ein Bündelatlas \mathfrak{A} besteht aus einer B überdeckenden Familie von Bündelkarten und einer Übergangsfunktion zu jedem Paar von Bündelkarten, so daß die Kozykelbedingung erfüllt ist: Auf dem gemeinsamen Definitionsbereich je dreier Karten ζ, η und ϑ gilt $g_{\zeta\vartheta} = g_{\zeta\eta} \cdot g_{\eta\vartheta}$. Ist α effektiv, so gibt es zu je zwei Bündelkarten höchstens eine Übergangsfunktion, und die Kozykelbedingung ist automatisch erfüllt.

B.1 Ist der Atlas maximal, so heißt das Tupel $\xi := (E, \pi, B, \mathcal{S}, \alpha, F, \mathfrak{A})$ ein Faserbündel. E heißt der Totalraum, π die Bündelprojektion, B die Basis, \mathcal{S} die Strukturgruppe und F die typische Faser von ξ . Die relativen Abhängigkeiten der Bestandteile zeigt das folgende Diagramm:



Schreibe statt ξ auch $F \rightarrow E \rightarrow B$, $E \rightarrow B$ oder einfach E .

Die typische Faser F und die tatsächlichen Fasern $E_b, b \in B$, bilden eine Kategorie, wenn man als (Iso)morphismen definiert: $\text{Aut}(F) := \text{im } \alpha \subset \text{Diffeo}(F)$, $\text{Iso}(F, E_b) := \{ \vartheta^{-1}(b, \cdot) \mid \vartheta \text{ eine Bündelkarte} \}$ und $\text{Iso}(E_b, E_c) := \text{Iso}(F, E_c) \circ \text{Iso}(E_b, F)$. In den Anwendungen tragen meist umgekehrt die tatsächlichen Fasern eine „differenzierbar vom Fußpunkt abhängende“ Struktur. Durch $\text{Aut}(E_b) \times E_b \rightarrow E_b$ sind dann Strukturgruppe, typische Faser und Operation, allerdings nur bis auf Isomorphie, gegeben.

Zu verschiedenen Zwecken eignen sich verschiedene Morphismusbegriffe für Faserbündel. Im Hinblick auf die Korrespondenz zwischen Faserbündeln und Prinzipalbündeln definiere ich: Ein Morphismus von Faserbündeln besteht aus zwei Abbildungen $\varphi: E \rightarrow E'$ und $\bar{\varphi}: B \rightarrow B'$, einem Homomorphismus $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ und einem λ -äquivarianten Diffeomorphismus $\psi: F \rightarrow F'$, so daß gilt: Zu jedem $b \in B$ gibt es $\vartheta \in \mathfrak{A}$ und $\vartheta' \in \mathfrak{A}'$, so daß b in U_ϑ liegt, $\bar{\varphi}(U_\vartheta)$ eine Teilmenge von $U_{\vartheta'}$ ist und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_\vartheta} & \xrightarrow{\varphi} & E'|_{U_{\vartheta'}} \\ \vartheta \downarrow & & \downarrow \vartheta' \\ U_\vartheta \times F & \xrightarrow{\bar{\varphi} \times \psi} & U_{\vartheta'} \times F' \end{array}$$

kommutiert. Die Einschränkung $\varphi_b: E_b \rightarrow E'_{\bar{\varphi}(b)}$ von φ heißt die Faser von φ über b . Die Morphismen sind faserweise Isomorphismen. Für zwei Faserbündel ξ und ξ' mit $\alpha = \alpha'$ bezeichne $\text{Hom}(\xi, \xi')$ nur die Morphismen der Form $(\varphi, \bar{\varphi}, \text{id}_\mathcal{S}, \text{id}_F)$, wodurch

sich $\text{Hom}(\xi, \xi')$ als Teilmenge von $\mathcal{C}_\infty(E, E')$ auffassen läßt. Dies gilt insbesondere für $\text{Aut}(\xi)$.

Sei \mathcal{T} eine Untergruppe von \mathcal{S} . Dann heißt ein maximaler Teilatlas \mathfrak{B} von \mathfrak{A} mit in \mathcal{T} verlaufenden Übergangsfunktionen eine Reduktion der Strukturgruppe auf \mathcal{T} .

Prinzipalbündel

Ein Faserbündel heißt ein Prinzipalbündel oder Hauptfaserbündel, wenn $F = \mathcal{S}$ und α die Linksmultiplikation ist. Der maximale Atlas liegt dann fest; seine Karten entsprechen umkehrbar eindeutig den lokalen Schnitten $\sigma: U \rightarrow E, U \subset B$. Der Totalraum wird üblicherweise mit P statt mit E bezeichnet. Auf P existiert eine kanonische freie Rechtsoperation von \mathcal{S} . Umgekehrt kann ein Prinzipalbündel bis auf die Benennung der Elemente der Basis sogar als eine freie Rechtsoperation $P \times \mathcal{S} \rightarrow P$ definiert werden. Die Bündelprojektion ist dann die Quotientenabbildung $P \rightarrow P/\mathcal{S}$.

Ein Paar $(\varphi: P \rightarrow P', \lambda: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}')$ heißt ein Morphismus von Prinzipalbündeln, wenn φ λ -äquivariant ist. $\text{Aut}(P)$ soll wiederum nur die Automorphismen der Form $(\varphi, \text{id}_{\mathcal{S}})$ bezeichnen.

Sei $P \rightarrow B$ ein \mathcal{S} -Prinzipalbündel, $R \rightarrow B$ ein \mathcal{T} -Prinzipalbündel mit $R \subset P$ und $\mathcal{T} < \mathcal{S}$, und das Paar der Inklusionen $(R \hookrightarrow P, \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{S})$ sei ein Morphismus. Dann heißt R eine Reduktion der Strukturgruppe auf \mathcal{T} . Für eine allgemeinere Definition siehe [Borel/Hirzebruch], 6.5. Eine Reduktionen R' auf \mathcal{T}' heiße durch $s \in \mathcal{S}$ zur Reduktion R auf \mathcal{T} konjugiert, wenn $R' = Rs$ und $\mathcal{T}' = s^{-1}\mathcal{T}s$ gilt. Die Nebenklasse $\mathcal{T}s$ ist dadurch eindeutig bestimmt.

B.2

Die Korrespondenz zwischen Prinzipalbündeln und Faserbündeln

B.3

Die Kategorie \mathfrak{F} der Faserbündel mit effektiver Strukturgruppe ist bei obiger Definition der Morphismen äquivalent zur Kategorie \mathfrak{P} der Paare von Prinzipalbündeln und effektiven Operationen der Strukturgruppe, wenn als Morphismen der Operationen nur äquivariante Diffeomorphismen zugelassen werden:

Zur Definition des Funktors $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{F}$ seien $P \times \mathcal{S} \rightarrow P$ und $\mathcal{S} \times F \rightarrow F$ gegeben. Setze $E(P) := P \times_{\mathcal{S}} F$. Bezeichne die Elemente von $E(P)$ mit $pf := [p, f] := \{(ps^{-1}, sf) \mid s \in \mathcal{S}\}$. Ein lokaler Schnitt $\sigma: U \rightarrow P, U \subset_{\text{offen}} B$, definiert die lokale Trivialisierung

$$\begin{aligned} E(P)|_U &\longleftarrow U \times F. \\ [\sigma_u, f] &\longleftarrow (u, f) \end{aligned}$$

Zur Definition des Funktors $\mathfrak{F} \rightsquigarrow \mathfrak{P}$ seien umgekehrt $\pi: E \rightarrow B, \alpha: \mathcal{S} \times F \rightarrow F$ und ein maximaler Atlas gegeben. Fasse F als Faserbündel über einem Punkt $\{*\}$ auf und setze $P(E) := \text{Hom}(F, E)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, E) & \longrightarrow & B \\ p & \longmapsto & \bar{p}(\ast) \end{array}$$

ist die Bündelprojektion, die Faser über b ist $\text{Iso}(F, E_b)$. Wegen $\mathcal{S} = \text{Aut}(F)$ ist die Komposition von Morphismen $\text{Hom}(F, E) \times \text{Aut}(F) \rightarrow \text{Hom}(F, E)$ die freie Rechtsoperation.

Unter schwächeren Voraussetzungen existiert der Funktor $\mathfrak{F} \rightsquigarrow \mathfrak{B}$ möglicherweise nicht mehr:

Ist etwa α nicht effektiv, so ist die Forderung, daß der Atlas Übergangsfunktionen enthalten soll, bereits künstlich. $P(E)$ läßt sich noch konstruieren, indem man für jede lokale Trivialisierung $E|_U \xrightarrow{\vartheta} U \times F$ ein triviales \mathcal{S} -Bündel $U \times \mathcal{S} \rightarrow U$ nimmt und diese für verschiedene lokale Trivialisierungen mit Hilfe der Übergangsfunktionen verklebt. Aus einem Faserbündelmorphismus läßt sich aber kein Prinzipalbündelmorphismus mehr gewinnen.

Läßt man bei den Operationen beliebige äquivariante Abbildungen als Morphismen zu, so bestimmt ebenfalls ein Faserbündelmorphismus keinen Prinzipalbündelmorphismus mehr.

B.4 Geschachtelte Bündel

Nenne ein Quadrupel (ξ, μ, ν, η) von Faserbündeln ein geschachteltes Faserbündel oder ein Faserbündel über einem Faserbündel (vgl. [Borel/Hirzebruch], 6.7), wenn folgende Beziehungen gelten: $B_\xi = B_\nu$, $E_\xi = B_\mu$, $F_\xi = B_\eta$, $E_\nu = E_\mu$, $F_\nu = E_\eta$, $F_\mu = F_\eta$, $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\eta$, $\alpha_\mu = \alpha_\eta$, im $\alpha_\nu \subset \text{Aut}(\eta)$, und α_ξ ist die von α_ν auf B_η induzierte Operation.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}_\eta & = & \mathcal{S}_\mu & & & & \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & & & \\ & F_\eta & = & F_\mu & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ & E_\eta & & E_\mu & & & \\ & \parallel & & \parallel & & & \\ & B_\eta & & B_\mu & & & \\ & \parallel & & \parallel & & & \\ \mathcal{S}_\nu & \circlearrowleft & F_\nu & \longrightarrow & E_\nu & \longrightarrow & B_\nu \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & \mathcal{S}_\xi & \circlearrowleft & F_\xi & \longrightarrow & E_\xi & \longrightarrow & B_\xi, \end{array}$$

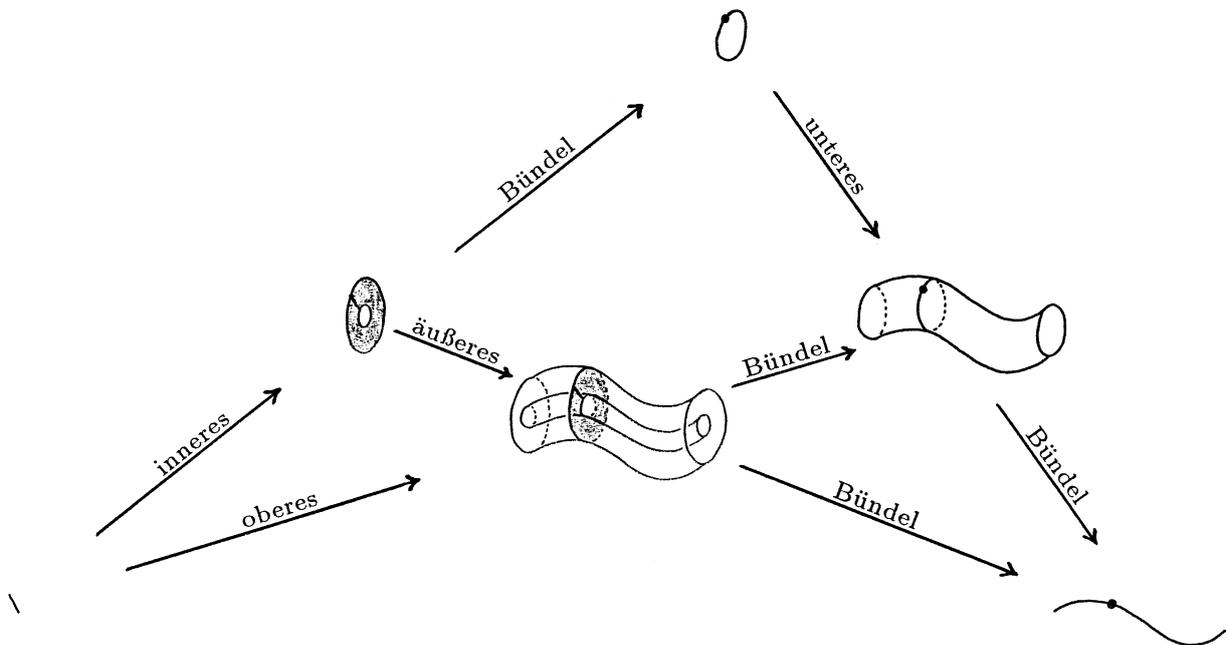
Nenne ξ das untere Bündel, μ das obere, ν das äußere, η das innere. Der Name Faserbündel über einem Faserbündel rührt daher, daß μ ein Faserbündel über dem Totalraum des Faserbündels ξ ist: $E_\mu \xrightarrow{F_\eta} E_\xi \xrightarrow{B_\eta} B_\xi$.

Die Vorgabe eines geschachtelten Faserbündels ist gleichwertig zur Vorgabe von

Faserbündeln ν und η mit $F_\nu = E_\eta$ und im $\alpha_\nu \subset \text{Aut}(\eta)$ wie zur Vorgabe von Prinzipalbündeln ν und η und Operationen $\alpha_\nu: \mathcal{S}_\nu \rightarrow \text{Aut}(\eta)$ und $\alpha_\eta: \mathcal{S}_\eta \times F_\eta \rightarrow F_\eta$:

		E	$\xrightarrow{\pi}$	B	$\alpha: \mathcal{S} \times F \longrightarrow F$
unteres Bündel	ξ	$P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} B_\eta$	\longrightarrow	B_ν	$\overline{\alpha}_\nu: \mathcal{S}_\nu \times B_\eta \longrightarrow B_\eta$
oberes Bündel	μ	$P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} P_\eta \times_{\mathcal{S}_\eta} F_\eta$	\longrightarrow	$P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} B_\eta$	$\alpha_\eta: \mathcal{S}_\eta \times F_\eta \longrightarrow F_\eta$
äußeres Bündel	ν	$P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} P_\eta \times_{\mathcal{S}_\eta} F_\eta$	\longrightarrow	B_ν	$\alpha_\nu: \mathcal{S}_\nu \times E_\eta \longrightarrow E_\eta$
inneres Bündel	η	$P_\eta \times_{\mathcal{S}_\eta} F_\eta$	\longrightarrow	B_η	$\alpha_\nu: \mathcal{S}_\eta \times F_\eta \longrightarrow F_\eta$

Ohne die Vorgabe von α_η liegt bereits ein geschachteltes *Prinzipalbündel* vor. Es ist $P_\xi = P_\nu$ und $P_\mu = P_\nu \times_{\mathcal{S}_\nu} P_\eta$.



Zeichnung 5: Geschachteltes Faserbündel

Anhang C Reduktion der Strukturgruppe

Etwas systematischer als zu Beginn von § 3 soll untersucht werden, inwieweit die Anwesenheit einer Gruppenoperation auf einem Prinzipalbündel die Reduktion von dessen Strukturgruppe erlaubt. Die Aussagen finden sich z. T. in [Conner], S. 123–129. Sie gelten differenzierbar wie auch — unter milden Voraussetzungen — topologisch. Satz C.1 und Korollar C.3 werden gelegentlich auch außerhalb dieses Anhangs verwendet.

Konjugiertheit

Benachbarte kompakte Untergruppen einer Liegruppe sind subkonjugiert:

C.1 Satz. *Sei G eine Liegruppe und K eine kompakte Untergruppe. Dann gibt es zu jeder in G offenen Umgebung O der 1 eine in G offene Umgebung V von K , so daß zu jeder in V enthaltenen Untergruppe H von G ein $g \in O$ mit $gHg^{-1} \subset K$ existiert.*

BEWEIS. [Montgomery/Zippin II], S. 216, ursprünglich [Montgomery/Zippin I]. \square

Seien X und Y topologische Räume. Die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y sei mit der kompakt-offen-Topologie versehen, $\mathfrak{P}(X \times Y)$ mit der für eine Potenzmenge naheliegenden Topologie mit Basis $\{ \mathfrak{P}(U) \subset \mathfrak{P}(X \times Y) \mid U \underset{\text{offen}}{\subset} X \times Y \}$. Die Zuordnung des Graphen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) & \hookrightarrow & \mathfrak{P}(X \times Y) \\ f & \longmapsto & \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \end{array}$$

werde mit Γ bezeichnet.

C.2 Lemma. *Ist X eine kompakte Mannigfaltigkeit, so ist Γ stetig.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $U_i \underset{\text{offen}}{\subset} X, V_i \underset{\text{offen}}{\subset} Y$, so daß $\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ eine offene Umgebung von Γf in $X \times Y$ ist. Ersetze U_i durch $U_i \cap f^{-1}(V_i)$, damit $f(U_i) \subset V_i$ gilt. $(U_i)_i$ bleibt eine offene Überdeckung von X , $\bigcup_i U_i \times V_i$ wird nicht größer und bleibt eine offene Umgebung von Γf . Gesucht ist eine offene Umgebung W von f in $\mathcal{C}(X, Y)$ mit $\Gamma(W) \subset \bigcup_i U_i \times V_i$.

Als Mannigfaltigkeit läßt sich U_i durch Kompakta $K_{i,j}, j \in \mathbb{N}$, mit $K_{i,j} \subset \overset{\circ}{K}_{i,j+1}$ ausschöpfen. Wegen $\bigcup_{i,j} \overset{\circ}{K}_{i,j} = \bigcup_i U_i = X$ ist auch $(\overset{\circ}{K}_{i,j})_{i,j}$ eine offene Überdeckung von X . Wähle eine endliche Teilüberdeckung $(\overset{\circ}{K}_{i_l, j_l})_{l \in \{1, \dots, L\}}$.

Bezeichne mit \overrightarrow{KV} für $K \subset X, K$ kompakt, $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$, das Element $\{ a \in \mathcal{C}(X, Y) \mid a(K) \subset V \}$ der Subbasis der kompakt-offen-Topologie. Setze $W := \bigcap_{l=1}^L \overrightarrow{K_{i_l, j_l} V_{i_l}}$. Dann ist $f \in W$, denn $f(K_{i_l, j_l}) \subset f(U_{i_l}) \subset V_{i_l}$, und es gilt $\Gamma(W) \subset \bigcup_i U_i \times V_i$. \square

Nach dieser Vorbereitung läßt sich Satz C.1 auf Homomorphismen übertragen:

C.3 Korollar. *Die Menge $\text{Hom}(K, S)/S$ der Homomorphismen einer kompakten Liegruppe K in eine beliebige Liegruppe S , geteilt durch die Konjugation in S , ist diskret.*

BEWEIS. (vgl. [Conner/Floyd], S.104) Sei $f \in \text{Hom}(K, S)$. Der Graph Γf ist eine kompakte Untergruppe der Liegruppe $K \times S$. Wähle eine Umgebung V von Γf gemäß

Satz C.1, ausgehend von $O = K \times \mathcal{S}$. Nach Lemma C.2 ist dann $U = \Gamma^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von f , und für $u \in U$ gibt es $(k, s) \in K \times \mathcal{S}$ mit $(k, s)\Gamma u(k, s)^{-1} \subset \Gamma f$. Das heißt aber

$$\forall x \in K \exists y \in K: (kxk^{-1}, su(x)s^{-1}) = (y, f(y)),$$

folglich $u(x) = s^{-1}f(kxk^{-1})s$, folglich $u = (s^{-1}f(k))f(s^{-1}f(k))^{-1}$. \square

Für den Rest des Paragraphen seien \mathcal{S} und H kompakte Liegruppen, $P \xrightarrow{\pi} B$ ein \mathcal{S} -Prinzipalbündel und $\varrho: H \rightarrow \text{Aut}(P)$ eine Operation, d. h. die Operationen von H und \mathcal{S} auf P kommutieren. C.4

Für $p \in P$ bezeichne K die Standgruppe $H_{\pi p}$, C ihren Zentralisator $\text{Cen}_H K$ und N ihren Normalisator $\text{Nor}_H K$. Wie in 3.3 heie $\iota_p: K \rightarrow \mathcal{S}$, $h \mapsto p \setminus hp$, mißbräuchlich die Isotropieoperation von ϱ im Punkte p . Ferner bezeichne $\mathcal{K}(p)$ das Bild im ι_p der Standgruppe, $\mathcal{C}(p)$ seinen Zentralisator $\text{Cen}_{\mathcal{S}}$ im ι_p und $\mathcal{N}(p)$ seinen Normalisator $\text{Nor}_{\mathcal{S}}$ im ι_p .

$$\begin{array}{ccc} H & & \mathcal{S}(p) \\ \cup & & \cup \\ N & & \mathcal{N}(p) \\ \subset \quad \supset & & \subset \quad \supset \\ C & K \xrightarrow{\iota_p} & \mathcal{K}(p) & \mathcal{C}(p) \end{array}$$

Heißt der Bezugspunkt o , kann seine Angabe bei \mathcal{K} , \mathcal{C} und \mathcal{N} , später auch bei Q und R , entfallen. Der Bezugspunkt für K , C und N , später auch für X , heißt ab jetzt immer o . ι_p ist ein Homomorphismus, und für $h \in H$ und $s \in \mathcal{S}$ ist $\iota_{hps} = s^{-1}\iota_p(h^{-1} \cdot \cdot \cdot h)s$. Bis auf weiteres gelte

(K1) Alle Isotropieoperationen sind zueinander in \mathcal{S} konjugiert.

Insbesondere ist dann K unabhängig von $o \in P$.

Lemma. Für $o \in P$ gibt es genau eine Abbildung $X: P \rightarrow \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ mit der Eigenschaft $\forall p \in P: \iota_p = X_p^{-1} \iota_o X_p$. C.5

BEWEIS. An dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & (p, q) & \longleftarrow & & (p, q) & \\ K \times P & \longrightarrow & P \times P & \longleftarrow & P \times_B P & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (k, p) & \longmapsto & (p, kp) & & (p, q) & \longmapsto & p \setminus q \end{array}$$

erkennt man die Stetigkeit der Abbildung $P \rightarrow \text{Hom}(K, \mathcal{S})$, $p \mapsto \iota_p$. Nach Voraussetzung liegen alle ι_p im \mathcal{S} -Orbit von ι_o ; wegen der Kompaktheit von \mathcal{S} ist $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S} \rightarrow \iota_o \cdot \mathcal{S}$,

$\mathcal{C}s \mapsto s^{-1}\iota_o s$, ein Homöomorphismus. Das durch

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow \\
 \mathcal{C} \backslash \mathcal{S} & \approx \iota_o \cdot \mathcal{S} \subset & \text{Hom}(K, \mathcal{S})
 \end{array}$$

definierte X genügt der Gleichung $\iota_p = X_p^{-1}\iota_o X_p$ und ist dadurch klarerweise eindeutig bestimmt.

Sind Prinzipalbündel und H -Operation differenzierbar, so auch X . Dies folgt z. B. aus Satz 3.5. Allerdings kenne ich keinen direkten Beweis. \square

Reduktionssätze

Definiere $Q(o) := \{ p \in P \mid \iota_p = \iota_o \}$. Wegen $\iota_p = \iota_o \Leftrightarrow \forall k \in K: kp = p\iota_o(k)$ kann man sich Q als eine Art Zentralisator vorstellen. Das Auftreten von \mathcal{C} und \mathcal{C} im folgenden Satz ist daher plausibel:

C.6 Satz. *In der Situation C.4 gelte (K1). Dann ist für jedes $o \in P$ die Einbettung $Q(o) \hookrightarrow P$ eine \mathcal{C} -äquivalente Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{C}(o)$. Die Menge $\{ (Q(p), \mathcal{C}(p)) \mid p \in P \}$ ist genau ein \mathcal{S} -Orbit.*

BEWEIS. Sei $b \in B$. Wähle eine lokalen Schnitt $\sigma: U \rightarrow P$ mit $b \in U$. Auf $U \times \mathcal{S}$ induziert σ die K -Operation

$$\begin{array}{ccc}
 K \times U \times \mathcal{S} & \dashrightarrow & U \times \mathcal{S} & (k, u, s) & \dashrightarrow & (u, \sigma_u \backslash k \sigma_u s) & = & (u, \iota_{\sigma_u}(k)s) \\
 \downarrow & & \uparrow & \downarrow & & \uparrow & & \\
 K \times P|_U & \xrightarrow{\varrho} & P|_U & (k, \sigma_u s) & \mapsto & k \sigma_u s & &
 \end{array}$$

Ich möchte aus σ einen ganz in Q verlaufenden Schnitt gewinnen: $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C} \backslash \mathcal{S}$ besitzt lokale Schnitte, folglich läßt sich X aus Lemma C.5 lokal liften:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\tilde{X}} & \mathcal{S} \\
 \cap & & \downarrow \\
 P & \xrightarrow{X} & \mathcal{C} \backslash \mathcal{S},
 \end{array}$$

dabei sei $\sigma_b \in V$. Verkleinere U , falls nötig, so daß $\sigma(U) \subset V$. Für $u \in U$ ist nun $\iota_{\sigma(u)} \cdot \tilde{X}(\sigma(u))^{-1} = \tilde{X}_{\sigma_u} \iota_{\sigma_u} \tilde{X}_{\sigma_u}^{-1} = \iota_o$. Ersetze σ durch $\tau := \sigma \cdot (\tilde{X}^{-1} \circ \sigma)$, dann ist $\iota_{\tau_u} = \iota_o$, d.h. $\tau(U) \subset Q$.

Für $q \in Q$ ist $qs \in Q \Leftrightarrow \iota_o = \iota_{qs} = s^{-1}\iota_q s = s^{-1}\iota_o s \Leftrightarrow s \in \mathcal{C}$, weshalb τ eine lokale Trivialisierung von Q induziert:

$$\begin{array}{ccc} \varrho|_K & \longrightarrow & \text{id}_U \times \iota_o \\ \mathcal{Q} & & \mathcal{Q} \\ P|_U & \longrightarrow & U \times \mathcal{S} \\ \cup & & \cup \\ Q|_U & \longrightarrow & U \times \mathcal{C} \end{array}$$

Mit anderen Worten: Lokale Trivialisierungen von Q sind gleichwertig zu lokalen Trivialisierungen von P , die gleichzeitig die K -Operation trivialisieren.

Damit ist gezeigt, daß Q lokal trivial ist und \mathcal{C} frei auf Q operiert, so daß $Q/\mathcal{C} = B$ gilt. Aus $\iota_{cp} = \iota_p(c^{-1} \cdots c) = \iota_p$ für $c \in \mathcal{C}$ folgt die \mathcal{C} -Äquivarianz. $Q(p) = QX_p$, $\mathcal{C}(p) = X_p^{-1}\mathcal{C}X_p$ und umgekehrt $Qs = Q(ps)$, $s^{-1}\mathcal{C}s = \mathcal{C}(ps)$ zeigt die letzte Behauptung. \square

Statt (K1) gelten ab jetzt die Bedingungen

(K2) Jedes $b \in B$ besitzt eine Umgebung U , so daß für jedes $c \in U$ H_c zu H_b isomorph ist.

(K3) Alle $\mathcal{K}(p)$, $p \in P$, sind in \mathcal{S} konjugiert.

Hängt $H \setminus B$ zusammen, so folgt aus (K2) mittels Satz C.1, daß alle H_b in H konjugiert sind, und mittels Lemma C.5 und Korollar C.3, daß sogar alle ι_p in $H \times \mathcal{S}$ konjugiert sind. Dies impliziert (K3).

Definiere $R(o) := \{p \in P \mid \text{im } \iota_p = \text{im } \iota_o\}$. Wegen $\text{im } \iota_p = \text{im } \iota_o \Leftrightarrow H_{\pi p}p = p_{\iota_o}(H_{\pi o})$ kann man sich R als eine Art Normalisator vorstellen. Das Auftreten von \mathcal{N} im folgenden Satz ist daher plausibel:

Satz. *In der Situation C.4 gelte (K2) und (K3). Dann ist für jedes $o \in P$ die Einbettung $R(o) \hookrightarrow P$ eine H -invariante Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{N}(o)$. Die Menge $\{(R(p), \mathcal{N}(p)) \mid p \in P\}$ ist genau ein \mathcal{S} -Orbit.*

BEWEIS. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P|_{B_{(K)}} & \xlongequal{\quad} & H \times_N P|_{B_K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{(K)} & \xlongequal{\quad} & H \times_N B_K, \end{array}$$

wobei B_K die Menge der Punkte aus B mit Standgruppe K bezeichnet. $B_{(K)}$ ist offen und abgeschlossen in B ; vgl. 1.2.

Sei $b \in B$ gegeben. Wegen (K3) gibt es $p \in P_b$ mit $\mathcal{K}(p) = \mathcal{K}(o)$. Mit Hilfe

von Korollar C.3 folgt, daß das Urbild Z' von $\iota_p \cdot \mathcal{S}$ unter $B_K \longrightarrow \text{Hom}(K, \mathcal{S})/\mathcal{S}$ offen und abgeschlossen in B_K ist. $Z := H \times_N Z'$ ist dann offen und abgeschlossen in $B_{(K)}$, folglich auch in B . Anwendung von Satz C.6 ergibt $P|_{Z'} = Q(p) \times_{\mathcal{C}(p)} \mathcal{S}$. Die Darstellung

$$R(o)|_Z = H \times_N (Q(p) \times_{\mathcal{C}(p)} \mathcal{N}(p))$$

zeigt die lokale Trivialität von $R(o)$. Der übrige Beweis ist leicht und verläuft zudem analog zu dem des Satzes C.6. \square

Diese Reduktion verträgt sich mit dem Schachteln von Prinzipalbündeln wie in Proposition 3.8 ausgeführt.

KAPITEL II

BESONDERHEITEN DES ABELSCHEN FALLES

§ 1 Die topologische Variante

Der Satz von Böhm

In ihrer Diplomarbeit beantwortet Renate [Böhm] die Frage, für welche Darstellungen kompakter, abelscher Liegruppen der Orbitraum eine — und wenn ja, welche — topologische Mannigfaltigkeit ist, durch die Angabe eines darstellungstheoretischen Kriteriums. Zunächst möchte ich das Ergebnis möglichst originalgetreu wiedergeben, ohne allerdings zusätzliche Begriffe einführen zu müssen.

Eine Besonderheit des abelschen Falles zeigt das folgende Lemma und dessen Beweis:

Lemma. Sei ϱ eine effektive, differenzierbare Operation einer kompakten, abelschen Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M und H eine Untergruppe von G . Dann ist auch die induzierte Operation von G/H auf $H \backslash M$ effektiv. 1.1

BEWEIS (vgl. [Böhm], Lemma 8, S. 25; dort allerdings ohne hinreichende Voraussetzungen). OBdA hänge der Orbitraum zusammen. Die Standgruppen der G -Operation sind innerhalb eines Orbitbündels nicht nur konjugiert, sondern gleich. Angewandt auf den Hauptorbittyp bedeutet dies: ϱ ist genau dann effektiv, wenn $\ker \varrho = \{1\}$ ist.

G operiert effektiv auf M

$\Rightarrow G$ operiert frei auf dem Hauptstratum $M_{\{1\}}$

$\Rightarrow G/H$ operiert frei auf $H \backslash M_{\{1\}}$

$\Rightarrow G/H$ operiert effektiv auf $H \backslash M$. \square

Sei nun G eine abelsche Liegruppe, $\sigma: G \rightarrow O(V)$ eine treue Darstellung und $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r+s} \cong \mathbb{C}^r \oplus \mathbb{R}^s$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten, d.h. $G < T^r \times \mathbb{Z}_2^s$. G_0 bezeichne die Einskomponente von G und $\bar{\sigma}$ die induzierte Operation von G/G_0 auf $G_0 \backslash V$. $S_j^1 := 1 \times \cdots \times 1 \times S^1 \times 1 \times \cdots \times 1$ bezeichne den j . Koordinatenkreis von T^k , $\mathbb{Z}_{2,j}$ die j . Koordinaten- \mathbb{Z}_2 von \mathbb{Z}_2^m , \mathbb{C}_l die l . Koordinatenachse von \mathbb{C}^r , \mathbb{R}_l die l . Koordinatenachse von \mathbb{R}^s . $\mathbb{R}_{(\geq 0)}^k$ steht für $A_1 \times \cdots \times A_k$, wobei für jedes l 1.2

$A_l = \mathbb{R}$ oder $A_l = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

Es gebe eine Überlagerung $p: T^k \rightarrow G_0$, so daß jede S_j^1 auf höchstens zweien der irreduziblen Komponenten nichttrivial operiert; eine solche Überlagerung heie spaltend. Falls S_1^1 nur auf einer, oBdA der ersten, Komponente nichttrivial operiert, definiere $h: S_1^1 \setminus \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch $[z] \mapsto |z|$. Falls S_1^1 auf zwei, oBdA den ersten beiden, Komponenten nichttrivial operiert, schreibe diese Operation als

$$\begin{aligned} S_1^1 &\longrightarrow U(2) \\ \lambda &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda^a & \\ & \lambda^b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und definiere $a' := \frac{a}{\text{ggT}\{a,b\}}$, $b' := \frac{b}{\text{ggT}\{a,b\}}$ und

$$\begin{aligned} h: S_1^1 \setminus \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}. \\ [(z_1, z_2)] &\longmapsto (z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2, z_1^{b'} \bar{z}_2^{a'}) \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist h ein Homöomorphismus, durch $h \times \text{id}$ geht die induzierte Operation $G/p(S_1^1) \rightarrow \text{Homöo}(S_1^1 \setminus V)$ in eine orthogonale Operation auf $\mathbb{R}_{(\geq 0)} \times \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ über, $\mathbb{R}_{(\geq 0)}$ ist ein trivialer Summand, $S_2^1 \times \dots \times S_k^1 \rightarrow G_0/p(S_1^1)$ wiederum eine spaltende Überlagerung.

Rekursiv entsteht so einen Homöomorphismus $h: G_0 \setminus V \rightarrow \mathbb{R}_{(\geq 0)}^k \times \mathbb{C}^{r-k} \times \mathbb{R}^s$, durch den die induzierte Operation $\bar{\sigma}$ in eine orthogonale Operation übergeht, derer $\mathbb{R}_{(\geq 0)}^k$ ein trivialer Summand ist.

Wie schon in I §7 heißt die Eigenschaft einer Operation $\varrho: G \times M \rightarrow M$, daß ihr Quotient eine evtl. berandete, topologische Mannigfaltigkeit ist, QM.

1.3 Satz. ([Böhm], Satz 2', S. 45) Sei $\sigma: G \rightarrow O(V)$ eine treue Darstellung einer kompakten, abelschen Liegruppe und $V \cong \mathbb{C}^r \oplus \mathbb{R}^s$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Genau dann hat σ QM, wenn gilt

- (1) Es gibt eine Überlagerung $T^k \rightarrow G_0$, so daß jede S_j^1 auf höchstens zwei \mathbb{C} -Komponenten nichttrivial operiert und
- (2) es ist $G/G_0 \cong H_1 \times \dots \times H_{r-k} \times \mathbb{Z}_2^m$, wobei jedes H_j höchstens auf der j . Komponente von \mathbb{C}^{r-k} , jede \mathbb{Z}_2 auf höchstens zwei Komponenten von \mathbb{R}^s nichttrivial operiert; dabei ist die durch oben definiertes h erhaltene Operation von G/G_0 auf $\mathbb{R}_{(\geq 0)}^k \times \mathbb{C}^{r-k} \times \mathbb{R}^s$ gemeint.

Sind die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so ist $G \setminus V \approx \mathbb{R}_{(\geq 0)}^k \times \mathbb{C}^{r-k} \times \mathbb{R}_{(\geq 0)}^s$.

1.4 BEMERKUNGEN

(i) Ist τ eine triviale Darstellung von G , so hat σ QM genau dann, wenn $\sigma \times \tau$ diese Eigenschaft hat, denn τ erhöht lediglich den Exponenten s . Im abelschen Fall ist QM daher eine stabile Eigenschaft.

(ii) Die H_j sind als die \mathbb{C}_j -Nichtkerne der Operation $h \circ \bar{\sigma}(\cdot) \circ h^{-1}$ eindeutig be-

stimmt; sie sind endlich zyklisch. \mathbb{Z}_2^m ist der \mathbb{R}^s -Nichtkern dieser Operation. (Für Nichtkerne siehe Definition I A.4.)

(iii) In [Böhm], Satz 2', in dem noch $m \leq s$ behauptet wird, muß es „effektive Aktion“ statt „fast effektive Aktion“ heißen, sonst ist bereits $\mathbb{Z}_2^2 \rightarrow O(\mathbb{R})$ ein Gegenbeispiel.

Ziel ist nun eine direktere Beschreibung der Darstellungen aus Satz 1.3, welche zudem als Vorbereitung der differenzierbaren Variante 5.11 des obigen Satzes dient.

Darstellungen der Kodimensionen 0 und 1

1.5

Sei $\sigma: G \rightarrow U(V)$ eine treue, unitäre Darstellung einer kompakten abelschen Liegruppe. Die Kodimension von G , aufgefaßt als Untermannigfaltigkeit eines maximalen Torus von $U(V)$, heie die reelle Kodimension von σ ; sie ist gleich $\dim_{\mathbb{C}} V - \dim_{\mathbb{R}} G$.

Sei $\sigma: G \rightarrow O(V)$ eine treue, orthogonale Darstellung eines 2-primären Torus; siehe IV 1.2. Die Kodimension von G , aufgefaßt als \mathbb{Z}_2 -Untervektorraum eines maximalen 2-primären Torus von $O(V)$, heie die 2-primäre Kodimension von σ ; sie ist gleich $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{Z}_2} G$.

Ich erlaube mir, a) die unitären Darstellungen auch als orthogonale Darstellungen aufzufassen und b) schlicht von Kodimension zu sprechen, da der 2-primäre Fall im ganzen Kapitel analog zum reellen Fall verläuft.

Es folgt eine Klassifizierung der Darstellungen der Kodimensionen 0 und 1, insbesondere der primen. Dabei sind der Begriff der primen Darstellung und die Primfaktorzerlegung aus I Anhang A wesentlich.

Jede Darstellung der Kodimension 0 eines Torus oder 2-primären Torus ist äquivalent zu $T^n \subset U(\mathbb{C}^n)$ bzw. $\mathbb{Z}_2^n \subset O(\mathbb{R}^n)$. Sie ist genau dann prim, wenn $n = 1$ ist. Eine ebenso explizite Beschreibung gilt für Kodimension 1: Für $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ und $a \in \mathbb{Z}^n$ seien ω_a und $G(a)$ definiert durch

1.6

$$1 \longrightarrow G(a) \longrightarrow T^n \xrightarrow{\omega_a} S^1 \longrightarrow 1, \\ \lambda \longmapsto \prod_{\nu=1}^n \lambda_{\nu}^{a_{\nu}}$$

für $a \in \mathbb{Z}_2^n$ seien sie definiert durch

$$1 \longrightarrow Q(a) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n \xrightarrow{\omega_a} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1. \\ \lambda \longmapsto \prod_{\nu=1}^n \lambda_{\nu}^{a_{\nu}}$$

σ_a bezeichne die Darstellung $G(a) \subset U(\mathbb{C}^n)$, τ_a die Darstellung $Q(a) \subset O(\mathbb{R}^n)$. Setze für $a = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ Stück}}$ $Q^{n-1} := Q(a)$ und $\tau^n := \tau_a$. Q^{n-1} ist ein maximaler 2-primärer Torus von $SO(\mathbb{R}^n)$. Für $n = 1$ und $|a| = 1$ sind σ_a und τ_a eindimensionale Darstel-

lungen trivialer Gruppen. Für alle anderen a sind die Gruppen nichttrivial und die Darstellungen treu und ohne trivialen Summanden.

Im folgenden Lemma bezeichnet $P(A) := R^\times \setminus A \setminus 0$ den projektiven Raum eines R -Moduls A .

1.7 Lemma. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}^n$ bzw. $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Dann gilt

$$(1) \quad P(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \{G < T^n \mid \text{codim } G = 1\} \text{ ist bijektiv.}$$

$$\pm b \mapsto G(b)$$

$$(2) \quad \sigma_a \text{ ist prim oder } G(a) \text{ ist trivial} \Leftrightarrow \forall \nu: a_\nu \neq 0.$$

$$(3) \quad P(\mathbb{Z}_2^n) \rightarrow \{Q < \mathbb{Z}_2^n \mid \text{codim } Q = 1\} \text{ ist bijektiv.}$$

$$b \mapsto Q(b)$$

$$(4) \quad \tau_a \text{ ist prim oder } Q(a) \text{ ist trivial} \Leftrightarrow \forall \nu: a_\nu \neq 0.$$

BEWEIS. Zu (1): $a \neq 0 \Rightarrow \omega_a$ ist surjektiv $\Rightarrow \text{codim } G(a) = 1$. Sei umgekehrt $H < T^n$ mit $\text{codim } H = 1$. Dann ist $G/H \cong S^1$. Wegen $T^n = \prod_{k=1}^n S^1$ in der Kategorie der abelschen Gruppen sind die ω_a mit $a \in \mathbb{Z}^n$ alle Morphismen von T^n nach S^1 , folglich ist $H = \ker \omega_a$ für geeignetes $a \neq 0$.

Zu (2): $G(a)$ ist nicht prim

$$\Leftrightarrow \exists \emptyset \neq J \subsetneq \underline{n}: G(a) = \left(G(a) \cap \prod_{j \in J} S_j^1\right) \times \left(G(a) \cap \prod_{j \notin J} S_j^1\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists \emptyset \neq J \subsetneq \underline{n}: \prod_{j \in J} S_j^1 \subset G(a) \quad (\text{wegen } \text{codim } G(a) = 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in \underline{n}: a_j = 0.$$

(3) und (4) lassen sich analog zeigen. \square

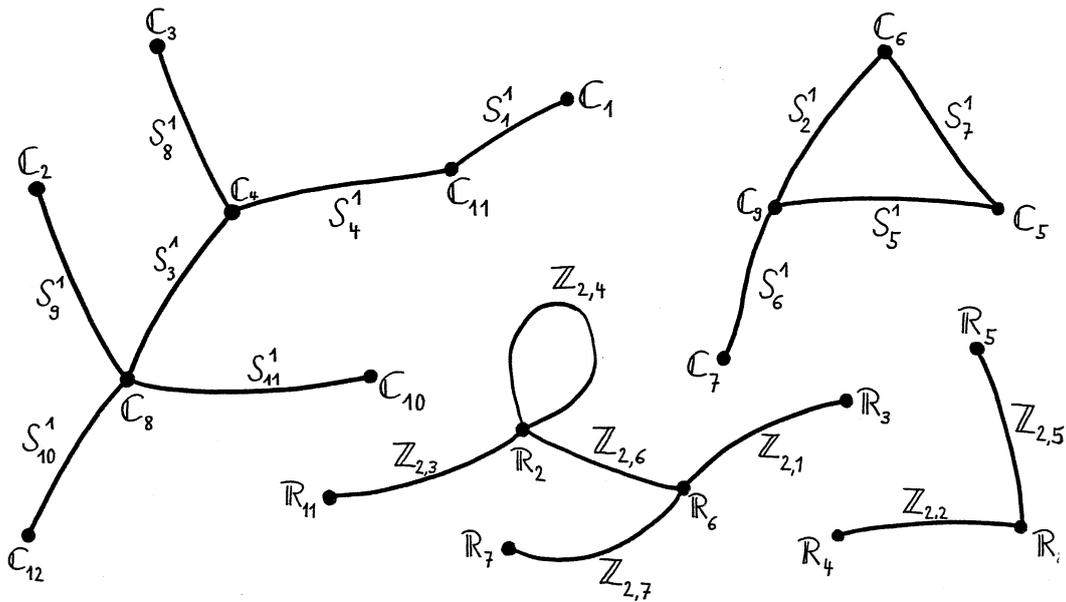
Ohne Beweis sei $\pi_0(G(a)) \cong G(a)/G(a)_0 \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}\{a_\nu \mid 1 \leq \nu \leq n\}}$ angemerkt.

Umformulierung

Sei $\sigma: G \rightarrow O(V)$ nun wieder eine treue Darstellung mit den Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 1.3. Es gelten die Konventionen 1.2. \mathbb{R}^s wird je nach Bedarf als Teilmenge von V oder von $G_0 \setminus V$ aufgefaßt. Wähle eine spaltende Überlagerung $p: T^k \rightarrow G_0$ und einen Isomorphismus $q: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow (\mathbb{R}^s\text{-Nichtkern von } \bar{\sigma})$ und nenne folgenden eindimensionalen simplizialen Komplex den Graphen \mathcal{G} von σ bezüglich p und q :

Jeder \mathbb{C}_j , $1 \leq j \leq r$, und jeder \mathbb{R}_j , $1 \leq j \leq s$, werde durch eine Ecke, jede S_j^1 , $1 \leq j \leq k$, und jede $\mathbb{Z}_{2,j}$, $1 \leq j \leq m$, durch eine Kante repräsentiert, der Sachverhalt, daß S_j^1 auf $\mathbb{C}_{l_j^1}$ und $\mathbb{C}_{l_j^2}$ nichttrivial operiert, dadurch, daß die S_j^1 repräsentierende Kante die $\mathbb{C}_{l_j^1}$ und $\mathbb{C}_{l_j^2}$ repräsentierenden Ecken miteinander verbindet, daß $\mathbb{Z}_{2,j}$ auf $\mathbb{R}_{l_j^1}$ und $\mathbb{R}_{l_j^2}$ nichttrivial operiert, ebenso. Falls S_j^1 bzw. $\mathbb{Z}_{2,j}$ auf nur einer Koordinate nichttrivial operiert, ist $l_j^1 = l_j^2$ zu nehmen.

\mathcal{G} ist die disjunkte Vereinigung seines komplexen, d.h. zu den Kreisen und komplexen Koordinatenachsen gehörenden, Anteils $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ und des reellen, d.h. zu den \mathbb{Z}_2 'en und



Zeichnung 6: Beispiel eines Graphen

reellen Koordinatenachsen gehörenden, Anteils $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$. Für jede Zusammenhangskomponente Z von \mathcal{G} sei U_Z das Produkt der in ihr vorkommenden Koordinatenkreise bzw. $-\mathbb{Z}_2$ 'en, W_Z das Produkt der in ihr vorkommenden Koordinatenachsen.

Für die $Z \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ gilt: $\sigma \circ p$ ist das Produkt seiner Einschränkungen auf $U_Z \rightarrow O(W_Z)$, p das derjenigen auf $U_Z \rightarrow p(U_Z)$, $\sigma|_{(G_0, \mathbb{C}^r)}$ das derjenigen auf $p(U_Z) \hookrightarrow O(W_Z)$ und h das der jeweiligen h zu den $\sigma|_{(p(U_Z), W_Z)}$ und $\text{id}_{\mathbb{R}^s}$, insbesondere ist

$$h(G_0 \setminus V) = \prod_{Z \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}} h(U_Z \setminus W_Z) \times \mathbb{R}^s.$$

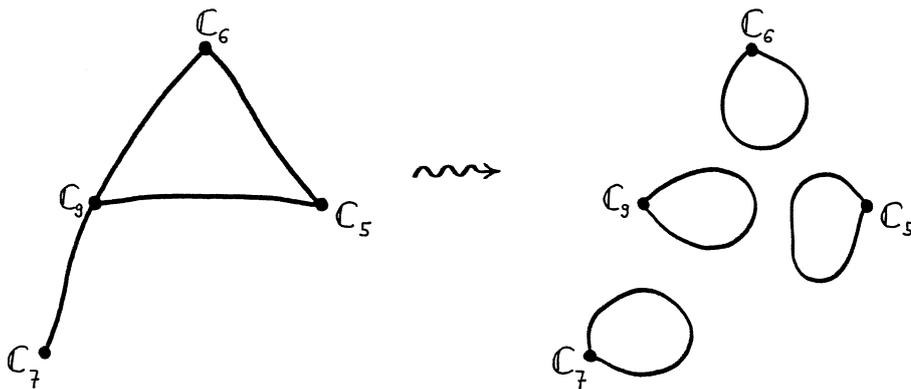
Desweiteren ist

$$\begin{aligned} \text{codim}_{T_{\max}(U(W_Z))} p(U_Z) &= \dim_{\mathbb{C}} W_Z - \dim U_Z \\ &= (\text{Anzahl der Ecken in } Z) - (\text{Anzahl der Kanten in } Z) \\ &\in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

denn als eine Kodimension muß diese Zahl mindestens 0, da Z zusammenhängt, darf sie höchstens 1 sein.

Ist die Kodimension 0, so enthält Z genau einen Zykel, es ist $p(U_Z) = \prod_{l \in Z} U(C_l)$ und $h(U_Z \setminus W_Z) = \mathbb{R}_{\geq 0}^{\text{Anz. der Kanten}}$. Die Einschränkung von p auf U_Z kann durch das Produkt $\prod_{l \in Z} \text{id}_{U(C_l)}$ ersetzt werden. Aus Z werden dann lauter isolierte Ecken mit „Schleifen“, wie in Zeichnung 7 dargestellt. Ist die Kodimension 1, so ist Z ein Baum und $h(U_Z \setminus W_Z) = \mathbb{R}^{\text{Anz. der Kanten}} \times \mathbb{C}$.

Für die $Z \subset \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ gilt größtenteils analoges: $\sigma \circ q$ ist das Produkt seiner Ein-



Zeichnung 7: Ersetzung einer Zusammenhangskomponente der Kodimension 0 durch isolierte Ecken mit Schleifen

schränkungen auf $U_Z \rightarrow O(W_Z)$, q das derjenigen auf $U_Z \rightarrow p(U_Z)$ und $\sigma|_{(\text{im } q, \mathbb{R}^s)}$ das derjenigen auf $q(U_Z) \hookrightarrow O(W_Z)$. Die Kodimension von $q(U_Z)$ in $Q_{\max}(O(W_Z))$ ist 0 oder 1. Ist sie 0, so ist $q(U_Z) = \prod_{l \in Z} O(\mathbb{R}_l)$; ersetze dann wiederum die Einschränkung von q auf U_Z durch $\prod_{l \in Z} \text{id}_{O(\mathbb{R}_l)}$. Ist die Kodimension 1, so ist Z ein Baum und $h(U_Z \setminus W_Z) = \mathbb{R}^{\text{Anz. der Kanten}} \times \mathbb{R}$. Der triviale Summand von σ besteht genau aus den isolierten Ecken von $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ der Kodimension 1.

Weniger formalisiert findet sich die Argumentation für den reellen Fall in [Böhm], S. 43–44.

1.8 Lemma. σ erfülle die Bedingungen (1) und (2) aus Satz 1.3 und \mathcal{G} sei der Graph zu σ bezüglich —gegebenenfalls wie oben abgeänderter— p und q . Dann bestimmt $V = \prod_{Z \subset \mathcal{G}} W_Z$ bis auf die willkürliche Zerlegung des trivialen Summanden die Primfaktorzerlegung von σ , und deren Faktoren haben reelle bzw. 2-primäre Kodimension 0 oder 1.

BEWEIS. Ich ignoriere den trivialen Summanden von σ . σ und $\bar{\sigma}$ sind effektiv (Lemma 1.1). $\{W_Z \mid Z \subset \mathcal{G}\}$ bestimmt Faktorisierungen von $\sigma|_{(G_0, V)}$ (Satz 1.3 (1)) und von $\bar{\sigma}$ (Satz 1.3 (2)), folglich auch von σ (Lemma I A.6). Die Aussage über die Kodimension folgt unmittelbar aus den diesem Lemma vorangehenden Absätzen. Der mit Hilfe des Graphen und des Lemmas 1.7 leichte Beweis der Primitivität der Faktoren bleibt dem Leser überlassen. \square

Satz 1.3 erscheint jetzt in folgender Gestalt:

1.9 Satz. Sei $\sigma: G \rightarrow O(V)$ eine treue Darstellung einer kompakten, abelschen Liegruppe. Genau dann hat σ QM, wenn jeder Primfaktor von σ Kodimension 0 oder 1 besitzt. In diesem Falle ist $G \setminus V$ homöomorph zu einem Vektorraum, wenn alle Primfaktoren 1-kodimensional sind, und homöomorph zu einem abgeschlossenen Halbraum sonst.

BEWEIS. Die Hinrichtung folgt aus Satz 1.3 und Lemma 1.8. Die Rückrichtung folgt

aus Lemma 1.7, den Homöomorphismen

$$\begin{array}{ccc} S^1 \setminus \mathbb{C} & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ [z] & \longmapsto & |z| \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} G(a) \setminus \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C} , \\ [z] & \longmapsto & \left(f_1(|z|), \dots, f_{r-1}(|z|), \frac{\omega_a(z)}{\omega_a(|z|)} \cdot f_r(|z|) \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \setminus \mathbb{R} & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ [x] & \longmapsto & |x| \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Q^{s-1} \setminus \mathbb{R}^s & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}^{s-1} \times \mathbb{R} , \\ [x] & \longmapsto & \left(f_1(|x|), \dots, f_{s-1}(|x|), \frac{\omega_{(1, \dots, 1)}(x)}{\omega_{(1, \dots, 1)}(|x|)} \cdot f_r(|x|) \right) \end{array}$$

wobei $f: \mathbb{R}_{\geq 0}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $f: \mathbb{R}_{\geq 0}^s \rightarrow \mathbb{R}^{s-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebige Homöomorphismen seien, und der Vertauschbarkeit der Quotientenbildung mit der Produktbildung. Da S^1 auf $\mathbb{R}^{r-1} \times \{0\}$ trivial operiert, darf $\frac{\omega_a(z)}{\omega_a(|z|)}$ für $z \notin (\mathbb{C}^\times)^r$ undefiniert sein; analog im reellen Fall. Da in 5.5 bessere Homöomorphismen konstruiert werden, weise ich hier die Homöomorphie nicht nach. \square

BEMERKUNG. Die Charakterisierung der auftretenden Primfaktoren durch die Kodimension gilt ähnlich für Operationen endlicher Gruppen auf komplexen Mannigfaltigkeiten (siehe [Prill] und [Böhm], S. 4).

§2 Ecken

STRATIFIZIERUNGEN

In I 2.10 war eine Stratifizierung \mathbf{S} einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M als eine lokal endliche, die Randbedingung erfüllende Menge \mathbf{S} differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten von M definiert worden. Das Paar (M, \mathbf{S}) heißt dann eine stratifizierte Mannigfaltigkeit, $\bigcup \mathbf{S} = \bigcup_{X \in \mathbf{S}} X$ heie die stratifizierte Teilmenge von M .

Für stratifizierte Mannigfaltigkeiten bieten sich verschiedene Morphismusbegriffe an. In der vorliegenden Arbeit heie eine stetige Abbildung f zwischen stratifizierten Mannigfaltigkeiten (M, \mathbf{S}) und (M', \mathbf{S}') stratifiziert, wenn f jedes Stratum von M differenzierbar in ein Stratum von M' abbildet. Beachte, daß f ungeachtet der möglicherweise kleineren stratifizierten Teilmenge auf ganz M definiert ist.

Ecken

DEFINITION

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Nenne eine Teilmenge der Form $\mathbb{R}_{>0} v$ mit $v \in V \setminus 0$ einen Strahl in V . Sei s_+ ein Strahl in V , I eine n -elementige Menge und $(s_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise verschiedener Strahlen in V , die sich durch s_+ festlassende, orthogonale Abbildungen beliebig permutieren lassen. Dies definiert eine treue orthogonale Darstellung der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_I auf V mit — außer für

$n = 1 - s_+^\perp$ und span s_+ als den isotypischen, gleichzeitig irreduziblen Komponenten.

Für $J \subsetneq I$ sei $V_J := \sum_{j \in J} s_j = \left\{ \sum_{j \in J} v_j \mid v_j \in s_j \right\}$ der von den jeweiligen Strahlen aufgespannte „positive Sektor“. Insbesondere ist $V_\emptyset = \{0\}$ und $V_{\{i\}} = s_i$ für $i \in I$. $V \setminus \bigcup_{J \subsetneq I} V_J$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten; nenne die s_+ umfassende Zusammenhangskomponente V_I . Die Menge $\mathbf{S} := \{V_J \mid J \subset I\}$ ist eine Stratifizierung der Länge $n + 1$ (einer Teilmenge) von V .

Definition. Das Tripel (V, \mathbf{S}, I) — kurz V_\bullet — heie eine n -dimensionale Ecke. s_+ heie der positive Strahl von V_\bullet ; es ist der Schnitt von trivialer Komponente der \mathfrak{S}_I -Operation und hohstem Stratum V_I . Die s_i heißen die Kanten von V_\bullet . I heie die Indexmenge von V_\bullet . Nenne V_\bullet auch die aus s_+ und den s_i konstruierte Ecke oder die aus u und den d_i konstruierte Ecke, wenn Erzeuger $u \in s_+$ und $d_i \in s_i$ gegeben sind, so daß $\|d_i\| = \|d_j\|$ fur alle i, j .

Eine Abbildung f heißt ein Morphismus von einer Ecke (V, \mathbf{S}, I) nach einer Ecke (V', \mathbf{S}', I') , wenn f ist eine lineare, metrische, stratifizierte Bijektion von V nach V' ist.

Damit ist die Kategorie der Ecken definiert. Jeder Morphismus ist ein Isomorphismus. Ein Morphismus $f: V_\bullet \rightarrow V'_\bullet$ induziert ein Bijektion $\iota: I \rightarrow I'$ der Indexmengen durch die Forderung $f(V_{\{i\}}) = V'_{\{\iota(i)\}}$. Die Automorphismengruppe einer Ecke V_\bullet mit Indexmenge I ist gerade \mathfrak{S}_I ; sie operiert transitiv auf der Menge der Strata jeder vorgegeben Hohe. Fur $J \subset I$ heie $\text{Aut}(V_\bullet, V_J) := \{f \in \text{Aut}(V_\bullet) \mid f(V_J) = V_J\}$ die Gruppe der relativen Automorphismen; es ist $\text{Aut}(V_\bullet, V_J) = \mathfrak{S}_J \times \mathfrak{S}_{I \setminus J}$.

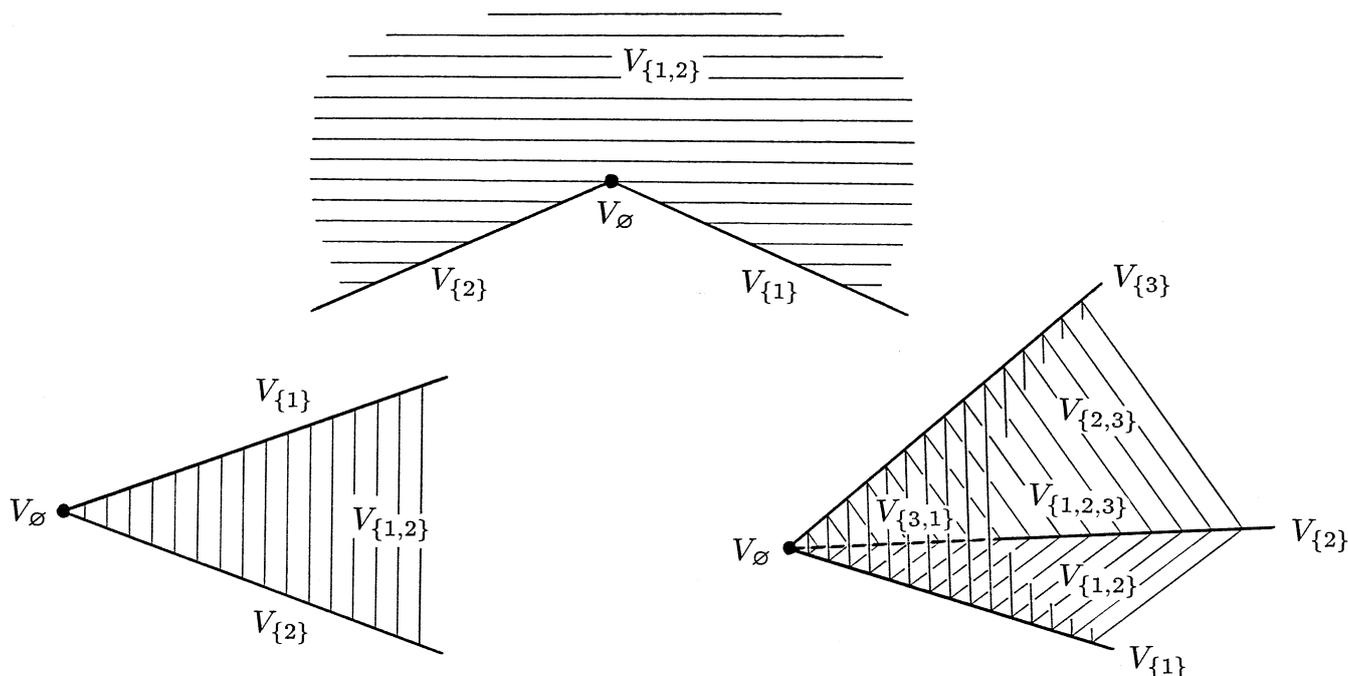
ANDERE ISOMORPHIEBEGRIFFE

Fur die stratifizierte Teilmengen $\bigcup \mathbf{S}$ und $\bigcup \mathbf{S}'$ zweier Ecken V_\bullet und V'_\bullet gleicher Dimension boten sich auch schwachere Isomorphiebegriffe an:

- (1) Die stratifizierte Teilmengen $\bigcup \mathbf{S}$ und $\bigcup \mathbf{S}'$ sind genau dann isometrisch, wenn V_\bullet und V'_\bullet isomorph sind. Außer im Falle des Halbraums, dessen Stratifizierung sich nicht aus der stratifizierte Teilmenge rekonstruieren lat, induzieren alle Isometrien bereits Isomorphismen.
- (2) $\bigcup \mathbf{S}$ und $\bigcup \mathbf{S}'$ sind genau dann linear isomorph, wenn beide streng konvex, Halbraume oder streng konkav sind.
- (3) Gleiches gilt fur Diffeomorphie, da das Tangential im Nullpunkt ein linearer Isomorphismus der zugehorigen Ecken ist.
- (4) Die stratifizierte Teilmengen je zweier Ecken sind zueinander homomorph.

NIEDERE DIMENSIONEN

Ecken der Dimension 0 gibt es nicht. Die einzigen Ecken der Dimension 1 sind abgeschlossene Halbgeraden. Eine gesonderte Behandlung dieser Dimension unterschlage ich gelegentlich. Ecken der Dimensionen 2 und 3 zeigen die Zeichnungen 8 bis 10.



Zeichnungen 8–10: Ecken der Dimensionen 2 und 3

PARAMETER

Sei V_\bullet die aus u und $(d_i)_{i \in I}$ konstruierte Ecke; ihre Dimension sei n . Das $(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnitts der stratifizierten Teilmenge $\bigcup S$ mit der Einheitssphäre von V heie der Öffnungswinkel von V_\bullet .

$$\alpha_{V_\bullet} := \sqrt{n-1} \cot \sphericalangle(u, d_i) = \sqrt{n-1} \frac{\langle u, d_i \rangle}{\sqrt{\|u\|^2 \|d_i\|^2 - \langle u, d_i \rangle^2}}, \quad i \text{ beliebig,}$$

heie der Parameter von V_\bullet . Öffnungswinkel und Parameter bestimmen einander gegenseitig. Der Parameter der aus $-u$ und $(d_i)_{i \in I}$ konstruierten Ecke ist $-\alpha_{V_\bullet}$. Offenbar sind zwei Ecken gleicher Dimension genau dann isomorph, wenn ihre Parameter übereinstimmen.

Die aus dem euklidischen Standardvektorraum \mathbb{R}^1 , der Stratifizierung $\{\{0\}, \mathbb{R}_{>0}\}$ und der Indexmenge $\{1\}$ bestehende Ecke heie A_\bullet^1 . Alle eindimensionalen Ecken sind zu A_\bullet^1 isomorph. Sei nun $n \geq 2$. Wähle $t \in \mathbb{R}$. Nimm den euklidischen Standardvektorraum \mathbb{R}^n und die Indexmenge $\{1, \dots, n\}$. Setze $u := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und ${}^t d_i := e_i + (t-1)u$, $1 \leq i \leq n$, wobei e_i den i . Standardbasisvektor des \mathbb{R}^n bezeichnet. Nenne die aus diesen Daten konstruierte Ecke \mathcal{A}_\bullet^n . Ihr Parameter ist gerade t , und sie soll als Repräsentant ihrer Isomorphieklasse dienen. Einige charakteristische Ecken und ihre Parameter sind

t	$-\infty$	$-\sqrt{n+1}$	-1	0	1	$\sqrt{n+1}$	∞
\mathcal{A}^n	ganzer Raum	Außenecke des Simplex	Außenecke des Kubus	Halbraum	Innenecke des Kubus	Innenecke des Simplex	abgeschlossener Strahl

Wie schon das Wort „Ecke“ beziehen sich „Halbraum“, „Innenecke des Kubus“, „streng konvex“ und ähnliches offenbar nicht auf den euklidischen Vektorraum V , sondern auf dessen stratifizierte Teilmenge $\bigcup S$. Die nur mengentheoretisch aufzufassenden Grenzwerte bei $\pm\infty$ mögen der Intuition dienen.

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ECKEN VERSCHIEDENER PARAMETER

Sei V_\bullet eine Ecke, I ihre Indexmenge, s_+ ihr positiver Strahl, s_i , $i \in I$, ihre Kanten. $s_i + \mathbb{R}s_+$ ist eine offene Halbebene. V'_\bullet sei eine Ecke gleicher Dimension, I' etc. die entsprechenden Daten.

2.1 Lemma.

- (1) Zu zwei Ecken V_\bullet und V'_\bullet gleicher Dimension und einer Bijektion $\iota: I \rightarrow I'$ ihrer Indexmengen gibt es genau einen Isomorphismus $f: V \rightarrow V'$ der euklidischen Vektorräume mit $f(s_+) = s'_+$ und $f(s_i + \mathbb{R}s_+) = s'_{\iota(i)} + \mathbb{R}s'_+$ für $i \in I$. f ist genau dann ein Morphismus der Ecken, wenn $f(s_i) = s'_i$ für alle i gilt, und genau dann stimmen die Parameter von V_\bullet und V'_\bullet überein.
- (2) Zu jeder Ecke V_\bullet gibt es genau eine Ecke V'_\bullet mit Parameter 0, $V' = V$, $I' = I$, $s'_+ = s_+$ und $s'_i + \mathbb{R}s'_+ = s_i + \mathbb{R}s_+$ für $i \in I$. Diese heiße der zu V_\bullet gehörige Halbraum.

DER BEWEIS ist trivial. \square

2.2 TANGENTIALE UND NORMALE ECKEN

Zwischen Ecken verschiedener Dimensionen bestehen Beziehungen: Sei V_\bullet die durch u und $(d_i)_{i \in I}$ bestimmte n -dimensionale Ecke, $\emptyset \subsetneq J \subsetneq I$, $j := \#J$ und p_J die orthogonale Projektion mit $\text{span } V_J$ als Kern.

Der durch $\{V_K \mid K \subset J\}$ stratifizierte euklidische Vektorraum $\text{span } V_J$ ist die durch $\sum_{j \in J} d_j$ und $(d_j)_{j \in J}$ bestimmte j -dimensionale Ecke, genannt tangentielle Ecke

$(\text{span } V_J)_\bullet$. Die Parameter erfüllen die Beziehung $n(\alpha_{\text{span } V_J}_\bullet^2 - 1) = j(\alpha_{V_\bullet}^2 - 1)$. Die dadurch definierte Funktion

$$\tau_j^n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sqrt{\frac{j}{n}(t^2 - 1) + 1}$$

läßt erkennen, daß jede tangentielle Ecke konvex ist, denn $\tau_j^n > 0$, und daß ihr Parameter differenzierbar vom Parameter der ursprünglichen Ecke abhängt.

Der durch $\{p_J(V_K) \mid K \subset I \setminus J\}$ stratifizierte euklidische Vektorraum V_J^\perp ist die durch $p_J(u)$ und $(p_J(d_i))_{i \in I \setminus J}$ bestimmte $(n-j)$ -dimensionale Ecke, genannt normale Ecke $V_J^{\perp \bullet}$. Die Parameter erfüllen die Beziehung $\alpha_{\text{span } V_J}_\bullet \cdot \alpha_{V_J^{\perp \bullet}} = \alpha_{V_\bullet}$. Die dadurch definierte Funktion

$$\nu_{n-j}^n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{t}{\sqrt{\frac{j}{n}(t^2 - 1) + 1}}$$

läßt erkennen, daß der Parameter jeder normalen Ecke differenzierbar vom Parameter der ursprünglichen Ecke abhängt. Für die Rechnungen setze man $t := \alpha_{V_\bullet}$, $s := \sum_{j \in J} d_j$, $c := n + j(t^2 - 1)$ und beachte $p_J(d_j) = d_j - \frac{t^2-1}{c}s$ für $j \in J$ und $p_J(u) = u - \frac{t}{c}s$. Eine geometrische Interpretation von $\tau_j^n(t) \cdot \nu_{n-j}^n(t) = t$ kenne ich nicht; die Beziehungen $\tau_k^j \circ \tau_j^n = \tau_k^n$ und $\nu_k^j \circ \nu_j^n = \nu_k^n$ sind hingegen geometrisch offensichtlich.

Scharen von Ecken

DEFINITION

Ein differenzierbares Faserbündel, versehen mit einer Stratifizierung des Totalraums, so daß die Einschränkungen der Bündelprojektion auf die Strata selbst wieder differenzierbare Faserbündel sind, heie ein stratifiziertes Bündel. Schneiden der Strata mit einer Faser stratifiziert diese Faser.

Ein ν vermittelt $\{E_J \mid J \subset I\}$, I eine Indexmenge, stratifiziertes, riemannsches Vektorbündel $E \rightarrow B$, so daß jede Faser bE — der Fußpunkt wird ausnahmsweise oben links notiert —, versehen mit der ererbten Stratifizierung eine Ecke ist, heie eine Eckenschar $E_\bullet \rightarrow B$ oder kürzer E_\bullet . Eine stratifizierte Bündelabbildung, die faserweise linear, metrisch und bijektiv ist, heißt ein Morphismus von Eckenscharen. Dies definiert die Kategorie $\mathfrak{E}\mathfrak{s}$ der Eckenscharen.

Sei $E_\bullet \rightarrow B$ eine Eckenschar. Für $b \in B$ bezeichnet ${}^bE_\bullet$ die Faser über b , aufgefaßt als Ecke. Der Parameter α_{E_\bullet} einer Eckenschar $E_\bullet \rightarrow B$ ist die Abbildung $\alpha_{E_\bullet}: B \rightarrow \mathbb{R}$, $b \mapsto \alpha_{{}^bE_\bullet}$, die jedem Fußpunkt den Parameter der über ihm liegenden Ecke zuordnet.

Bei Untermengen des Totalraums eines riemannschen Vektorbündels sind die Addition, die Bildung des Erzeugnisses und die Bildungen des orthogonalen Komplements faserweise zu verstehen.

Lemma 2.1 überträgt sich auf Scharen:

Lemma.

- (1) Zu zwei gleichlangen Eckenscharen $E_\bullet \rightarrow B$ und $E'_\bullet \rightarrow B'$, einer Abbildung $c: B \rightarrow B'$ und einer Bijektion $\iota: I \rightarrow I'$ der Indexmengen gibt es genau eine faserweise Isometrie $f: E \rightarrow E'$ riemannscher Vektorbündel über c mit $f(s_+) = s'_+$ und $f(s_i + \mathbb{R}s_+) = s'_{\iota(i)} + \mathbb{R}s'_+$ für $i \in I$. f ist genau dann ein Morphismus von Eckenscharen, wenn $f(s_i) = s'_{\iota(i)}$ für alle i gilt, und genau dann ist $\alpha_{E_\bullet} = \alpha_{E'_\bullet} \circ f$.
- (2) Zu jeder Schar $E_\bullet \rightarrow B$ gibt es genau eine Schar $E'_\bullet \rightarrow B$ mit konstantem Parameter 0, $E' = E$, $I' = I$, $s'_+ = s_+$ und $s'_i + \mathbb{R}s'_+ = s_i + \mathbb{R}s_+$ für $i \in I$. Diese heie die zu E_\bullet gehörige Halbraumschar. Jedes $b \in B$ stiftet eine Trivialisierung $E \cong B \times {}^bE$ des unterliegenden riemannschen Vektorbündels. Für die Automorphismengruppen gilt $\text{Aut}(E_\bullet) \cong \text{Aut}(E'_\bullet) \cong \text{Aut}({}^bE'_\bullet) \cong \mathfrak{S}_I$.

DER BEWEIS ist trivial. \square

ZURÜCKZIEHEN

In \mathfrak{E}_5 existieren offenbar Pullbacks:

$$\begin{array}{ccc} c^*E_\bullet & \xrightarrow{\hat{c}} & E_\bullet \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{c} & B. \end{array}$$

Da jeder Morphismus $E'_\bullet \rightarrow E_\bullet$ von Scharen faserweise ein Isomorphismus ist, ist E'_\bullet stets zu c^*E_\bullet isomorph.

PRODUKTSCHAREN

Ist B eine Mannigfaltigkeit und (V, \mathbf{S}, I) eine Ecke, so bezeichnet $B \times V_\bullet$ die Produktschar, bestehend aus dem riemannschen Produktvektorbündel $B \times V \xrightarrow{\text{pr}_1} B$, der Stratifizierung $\{B \times X \mid X \in \mathbf{S}\}$ und der Indexmenge I .

UNIVERSELLE SCHAR UND MODULRAUM

Sei $n \geq 2$. Die Ecken $A_\bullet^n, t \in \mathbb{R}$, setzen sich zu einer Schar A_\bullet^n zusammen; deren zugrunde liegendes Vektorbündel ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{R}$. Jede Schar $E_\bullet \rightarrow B$ n -dimensionaler Ecken ist zu $\alpha_{E_\bullet}^*(A_\bullet^n)$ isomorph, d. h. $A_\bullet^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine universelle Schar, α_{E_\bullet} die klassifizierende Abbildung von E_\bullet und \mathbb{R} ein feiner Modulraum der n -dimensionalen Ecken.

ORTHOGONALES KOMPLEMENT UND NORMALENSCHAR

Sei $E_\bullet \xrightarrow{\pi} B$ eine Eckenschar und X ein vom Nullschnitt verschiedenes Stratum von E_\bullet . $\text{span } X \rightarrow B$ und daher auch $X^\perp \rightarrow B$, sind Untervektorbündel von $E \rightarrow B$, wobei „span“ und „ $()^\perp$ “ faserweise zu lesen sind. Definiere nun das Vektorbündel $KX \rightarrow X$ durch die Forderung „Die Faser $K_x X$ über $x \in X$ ist das orthogonale Komplement von $T_x \pi(x)X$ in $T_x \pi(x)E$ “.

Das Normalenbündel $NX \rightarrow X$ von X in E ist kanonisch isomorph zu $KX \rightarrow X$:

$$NX = \frac{TE|_X}{TX} \cong \frac{VE|_X + TX}{TX} \cong \frac{VE|_X}{VE|_X \cap TX} \cong KX, \quad (\clubsuit)$$

denn das Gleichheitszeichen gilt per definitionem von NX , das erste Isomorphiezeichen, da $X \rightarrow B$ submersiv ist, das zweite nach einem Isomorphissatz für Vektorräume und das dritte, da bX eine Untermannigfaltigkeit der riemannschen Mannigfaltigkeit bE ist.

Der Isomorphismus von Vektorbündeln

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial e_2} \Big|_{e_1} & \longleftarrow & (e_1, e_2) \\ VE & \longleftarrow & E \times_B E \\ & \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\ & E & \end{array}$$

des Vertikalbündels $VE \rightarrow E$ zu $E \times_B E \xrightarrow{\text{pr}_1} E$ wurde bereits in I 4.1 erwähnt. Für die Einschränkung auf X bevorzuge ich wegen seiner $\mathbb{R}_{>0}$ -Invarianz den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \|e_1\| \cdot \frac{\partial}{\partial e_2} \Big|_{e_1} & \longleftarrow & (e_1, e_2) \\ VE|_X & \longleftarrow & X \times_B E \\ & \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\ & X & \end{array}$$

und dessen Einschränkung auf die jeweiligen Untervektorbündel

$$\begin{array}{ccc} KX & \xleftarrow{\cong} & X \times_B X^\perp \\ & \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\ & X & \end{array} \quad (\spadesuit)$$

(♣) und (♠) ergeben zusammen einen $\mathbb{R}_{>0}$ -invarianten, faserweisen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} NX & \xrightarrow{f} & X^\perp \\ \downarrow & & \downarrow \pi|_{\cdot} \\ X & \xrightarrow{\pi|_{\cdot}} & B \end{array} \quad (\heartsuit)$$

von Vektorbündeln. Die in 2.2 definierten normalen Ecken ${}^bX^\perp_\bullet$ fügen sich zu einer Schar $X^\perp_\bullet \rightarrow B$ zusammen.

Das Vektorbündel $NX \rightarrow X$ wird eine Eckenschar $NX_\bullet \rightarrow X$, genannt die Normalschar des Stratums X , durch die Forderung „(♥) ist ein Morphismus von Eckenscharen, der die Identität der Indexmengen induziert“.

BEMERKUNGEN. 2.5

- (1) Beachte, daß die Isomorphie $NX_\bullet \cong X \times_B X^\perp_\bullet$ die Abbildung f und damit die Skalierung $\|e_1\| \cdot$ beinhaltet.
- (2) $NX \rightarrow X$ wird durch (♥) insbesondere zu einem riemannschen Vektorbündel.
- (3) Sei I die Indexmenge von $E_\bullet \rightarrow B$ und $\emptyset \subsetneq J \subset I$ mit $X = E_J$. Dann ist $I \setminus J$ die Indexmenge von $X^\perp_\bullet \rightarrow X$ wie von $NX_\bullet \rightarrow X$, und für $K \subset I \setminus J$ ist $f((NX)_K) = (X^\perp)_K$.

Ist

$$\begin{array}{ccc} E'_\bullet & \xrightarrow{f} & E_\bullet \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{c} & B \end{array}$$

ein Morphismus von Eckenscharen und sind X' und X Strata mit $f(X') \subset X$, so induziert f eine Bijektion zwischen den Indexmengen von $NX'_\bullet \rightarrow X'$ und $NX_\bullet \rightarrow X$,

und die gemäß Lemma 2.3 gebildete kommutative Ergänzung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} NX' & \dashrightarrow & NX \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f|_{(X',X)}} & X \end{array}$$

ist gerade das Normal Nf der Situation

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ \cup & & \cup \\ X' & \xrightarrow{f|_{(X',X)}} & X \end{array}$$

Der Grund ist, daß f faserweise eine Isometrie ist.

Ecken im weiteren Sinne

Sogleich werden vier weitere Sorten stratifizierter, euklidischer Vektorräume mit Indexmenge erklärt, nämlich komplexe Räume, reelle Räume, komplexifizierte Halbräume und reellifizierte Halbräume. Schon jetzt definiere ich die Kategorie der Ecken im weiteren Sinne: Ihre Objekte seien die Ecken und die gerade genannten anderen Sorten; ihre Morphismen seien die linearen, metrischen, stratifizierten Abbildungen zwischen Objekten gleicher Länge. Die Länge eines Objekts meint die Länge seiner Stratifizierung. In allen Fällen sei I eine n -elementige Indexmenge.

2.6 KOMPLEXE RÄUME

Sei V ein $2n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie zueinander senkrechter 2-dimensionaler Unterräume; V ist dann deren direkte Summe. Setze für $J \subset I$ $V_J := \sum_{j \in J} (U_j \setminus \{0\})$. Der euklidische Vektorraum V zusammen mit der Stratifizierung $\mathbf{S} := \{V_J \mid J \subset I\}$ und der Indexmenge I heiße komplexer Raum V_\bullet . Die Länge der Stratifizierung ist $n + 1$.

Die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \prod_{i \in I} O(U_i) \longrightarrow \text{Aut}(V_\bullet) \longrightarrow \mathfrak{S}_I \longrightarrow 1$$

spaltet hinten, d. h. es existiert ein Schnitt $\text{Aut}(V_\bullet) \leftarrow \mathfrak{S}_I$, dadurch wird $\text{Aut}(V_\bullet)$ zum semidirekten Produkt $\prod_{i \in I} O(U_i) \rtimes \mathfrak{S}_I$. $\text{Aut}(V_\bullet)$ operiert transitiv auf der Menge der Strata jeder vorgegebenen Höhe. Offenbar sind je zwei komplexe Räume gleicher Länge isomorph.

Versieh umgekehrt \mathbb{C}^n mit dem reellen Standardskalarprodukt. Wähle $(\mathbb{C} \cdot e_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}$, wobei e_ν den ν . Standardbasisvektor des \mathbb{C}^n bezeichnet, als Familie der Unterräume. Der aus diesen Daten konstruierte komplexe Raum \mathbb{C}_\bullet^n soll als Repräsentant seiner

Isomorphieklasse dienen. Jetzt ist in kanonischer Weise $\text{Aut}(\mathbb{C}_\bullet^n) \cong \text{O}(\mathbb{C})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

Die Stratifizierung von \mathbb{C}_\bullet^n ist die Stratifizierung des \mathbb{C}^n nach der Besetzung der Vektoren, soll heißen: Für $J \subset \{1, \dots, n\}$ ist $\mathbb{C}_J^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j \neq 0 \Leftrightarrow j \in J\}$.

REELLE RÄUME

Analog zu „komplexer Raum“ definiere ich einen reellen Raum V_\bullet , indem ich von einem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum V und einer Familie $(U_i)_{i \in I}$ zueinander senkrechter 1-dimensionaler Unterräume ausgehe.

Die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{O}(U_i) \longrightarrow \text{Aut}(V_\bullet) \longrightarrow \mathfrak{S}_I \longrightarrow 1$$

spaltet hinten. $\text{Aut}(V_\bullet)$ operiert transitiv auf der Menge der Strata jeder vorgegebenen Höhe. Je zwei reelle Räume gleicher Länge sind isomorph.

Versieh umgekehrt \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt und wähle $(\mathbb{R} \cdot e_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}$ als die Familie der Unterräume. Der aus diesen Daten konstruierte reelle Raum \mathbb{R}_\bullet^n soll als Repräsentant seiner Isomorphieklasse dienen. Wieder ist in kanonischer Weise $\text{Aut}(\mathbb{R}_\bullet^n) \cong \text{O}(\mathbb{R})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, und der \mathbb{R}^n ist nach der Besetzung der Vektoren stratifiziert.

KOMPLEXIFIZIERTE HALBRÄUME

Sei W_\bullet eine n -dimensionale Ecke vom Parameter 0, also ein Halbraum, I seine Indexmenge, H die Hyperebene $\bigcup_{J \subsetneq I} W_J$ und u der den positiven Strahl erzeugende Einheitsvektor. Auf $V := \mathbb{C} \oplus H$ definiert $\langle (z_1, w_1), (z_2, w_2) \rangle := \text{Re}(\overline{z_1} z_2) + \langle w_1, w_2 \rangle$ ein Skalarprodukt. Identifizieren von u mit $(1, 0)$ macht W zu einem Unterraum von V . Setze für $J \subsetneq I$ $V_J := W_J$ und $V_I := V \setminus H$. Der dergestalt stratifizierte euklidische Vektorraum V heiße zusammen mit der Indexmenge I komplexifizierter Halbraum V_\bullet . „Komplexifiziert“ wird also nicht ganz W , sondern nur der positive Strahl $\mathbb{R}_{>0} u$. Die Länge der Stratifizierung ist $n + 1$. Die Inklusion $W \rightarrow V$ ist ein Morphismus von Ecken i. w. S..

2.7

Die Automorphismengruppe von V_\bullet ist offenbar $\text{O}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_I$. Sie operiert transitiv auf der Menge der Strata jeder vorgegebenen Höhe. Je zwei komplexifizierte Halbräume gleicher Länge sind isomorph.

Nenne umgekehrt den aus ${}^0A^n$ konstruierten komplexifizierten Halbraum C_\bullet^n ; er soll als Repräsentant seiner Isomorphieklasse dienen.

REELLIFIZIERTE HALBRÄUME

Seien W_\bullet , I , H und u wie oben. Identifiziere $V := \mathbb{R} \oplus H$ mit W durch $(1, 0) \leftrightarrow u$. Setze für $J \subsetneq I$ $V_J := W_J$ und $V_I := V \setminus H$. Der dergestalt stratifizierte euklidische Vektorraum V heiße zusammen mit der Indexmenge I reellifizierter Halbraum V_\bullet . „Reellifiziert“ wird also nicht ganz W , sondern nur der positive Strahl $\mathbb{R}_{>0} u$. Die Länge der Stratifizierung ist $n + 1$. $W_\bullet \rightarrow V_\bullet$ ist ein Morphismus von Ecken i. w. S..

Die Automorphismengruppe von V_\bullet ist $\text{O}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{S}_I$. Sie operiert transitiv auf der

Menge der Strata jeder vorgegeben Höhe. Je zwei reellifizierte Halbräume gleicher Länge sind isomorph.

Nenne umgekehrt den aus ${}^0A^n$ konstruierten reellifizierten Halbraum R_\bullet^n ; er soll als Repräsentant seiner Isomorphieklasse dienen.

Morphismen

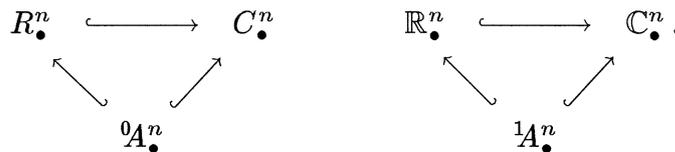
2.8 Für eine Ecke i. w. S. V_\bullet ist $\text{Aut}(V_\bullet) = G \times \mathfrak{S}_I$ mit

$$G = \begin{cases} 1 & \text{falls } V_\bullet \text{ Ecke} \\ \prod_{U \in \mathfrak{U}} O(U) \text{ bzw. } O(\mathbb{C})^n & \text{falls } V_\bullet \text{ komplexer (Standard-)Raum} \\ \prod_{U \in \mathfrak{U}} O(U) \text{ bzw. } O(\mathbb{R})^n & \text{falls } V_\bullet \text{ reeller (Standard-)Raum} \\ O(\mathbb{C}) & \text{falls } V_\bullet \text{ komplexifizierter Halbraum} \\ O(\mathbb{R}) & \text{falls } V_\bullet \text{ reellifizierter Halbraum.} \end{cases}$$

Setzt man $G_J := \{g \in G \mid g(V_J) \subset V_J \text{ und } g|_{V_J^\perp} = \text{id}_{V_J^\perp}\}$, so gibt es genau ein $G_{J'} \subset G$, so daß $G = G_J \times G_{J'}$. Damit ist

$$\text{Aut}(V_\bullet, V_J) = (G_J \times \mathfrak{S}_J) \times (G_{J'} \times \mathfrak{S}_{I \setminus J}) \subset O(\text{span } V_J) \times O(V_J^\perp).$$

2.9 Betrachte nun die sechs kanonischen Einbettungen



Jeder Morphismus ist eine Komposition aus diesen Einbettungen und Isomorphismen. Damit sind, da die Automorphismen angegeben und die Frage, wann zwei Objekte isomorph sind, beantwortet wurden, alle Morphismen „bekannt“.

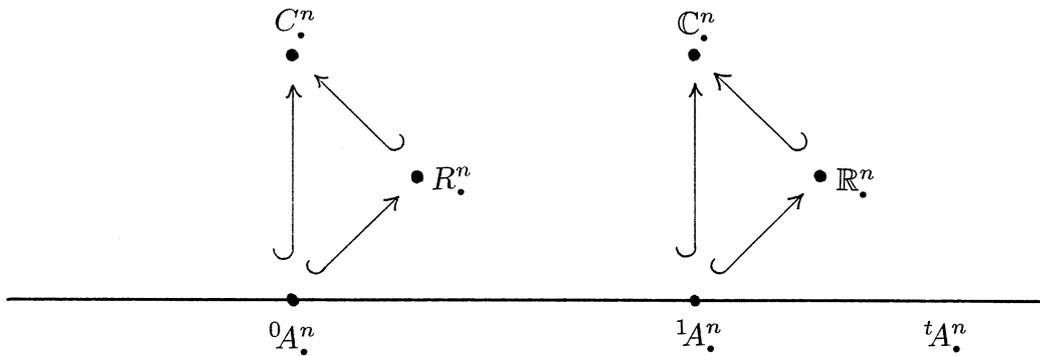
Eckenscharen im weiteren Sinne

Ein durch $\{E_J \mid J \subset I\}$, I eine Indexmenge, stratifiziertes, riemannsches Vektorbündel $E \rightarrow B$, so daß jede Faser, versehen mit der ererbten Stratifizierung, eine Ecke i. w. S. ist, heie eine Eckenschar i. w. S. $E_\bullet \rightarrow B$ oder kürzer E_\bullet . Ein Morphismus der zugrunde liegenden riemannschen Vektorbündel, der faserweise ein Morphismus von Ecken i. w. S. ist, heißt ein Morphismus von Eckenscharen i. w. S.. Dies definiert die Kategorie der Eckenscharen i. w. S..

Alles bei $\mathfrak{E}s$ ausgeführte überträgt sich sinngemäß auf Eckenscharen i. w. S., sogar mit einer gravierenden Vereinfachung: Alle Ecken i. w. S. derselben Sorte und Länge sind isomorph. Scharen, die keine Scharen im engeren Sinne sind, sind daher isomorph

zu Produktscharen, weshalb $C_{\bullet}^n \rightarrow \{\text{pt}\}$ bzw. $R_{\bullet}^n \rightarrow \{\text{pt}\}$ bzw. $\mathbb{R}_{\bullet}^n \rightarrow \{\text{pt}\}$ bzw. $\mathbb{C}_{\bullet}^n \rightarrow \{\text{pt}\}$ universell für Scharen der entsprechenden Sorte der Länge $n + 1$ sind.

„Schar“ bedeutet ab jetzt „Schar von Ecken i. w. S.“. Die Isomorphietypen von Ecken i. w. S. einer vorgegebenen Länge $n \geq 2$ und die Typen von Morphismen, die keine Isomorphismen sind, symbolisiert Zeichnung 11, in der die obigen Repräsentanten der Isomorphietypen und die sechs kanonischen Einbettungen aus 2.9 angegeben sind.



Zeichnung 11: Isomorphietypen von Ecken und Morphismen

Modellobjekte und -morphismen

2.10

Zum Gebrauch in den beiden folgenden Paragraphen definiere ich nun eine Eckenschar $E_{\bullet}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die „weicher“ vom Halbraum zur kubischen Ecke übergeht als die universelle Eckenschar $A_{\bullet}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Wähle eine differenzierbare, monotone Abbildung $\beta_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\beta_2 = 0$ nahe $] - \infty, 0]$ und $\beta_2 = 1$ nahe $[1, \infty[$. Sei $n \geq 3$. Die Abbildung $\nu_2^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus 2.2 ist eine offene Einbettung mit $] - \sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt{\frac{n}{2}}[$ als Bildmenge. Definiere

$$\begin{aligned} \beta_n: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ t &\longmapsto (\nu_2^n)^{-1}(\beta_2(t)) \end{aligned}$$

Jedes β_n ist differenzierbar und monoton mit $\beta_n = 0$ nahe $] - \infty, 0]$ und $\beta_n = 1$ nahe $[1, \infty[$. Wegen $\nu_2^n = \nu_2^j \circ \nu_j^n$ (siehe 2.2) gilt zudem $\beta_j = \nu_j^n \circ \beta_n$ für $2 \leq j < n$.

Setze $E_{\bullet}^1 := A_{\bullet}^1$. Definiere für $n \geq 2$ $E_{\bullet}^n \xrightarrow{\pi^n} \mathbb{R}$ als die Eckenschar mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{R}$ als unterliegendem riemannischem Vektorbündel, $\{1, \dots, n\}$ als Indexmenge und der Ecke $\beta_n(t)A_{\bullet}^n$ als der Faser über $t \in \mathbb{R}$. E_{\bullet}^n ist isomorph zum Rückzug von A_{\bullet}^n via β_n .

Für $n \geq 1$ bestehe die Menge Ms^n der Modellscharen der Länge $n + 1$ aus den in 2.9 genannten Ecken i. w. S. und der Eckenschar E_{\bullet}^n ; die Modellmorphisms der Länge $n + 1$ seien die in 2.9 genannten Einbettungen. Für $n = 1$ ist allerdings $R_{\bullet}^1 = \mathbb{R}_{\bullet}^1$, $C_{\bullet}^1 = \mathbb{C}_{\bullet}^1$ und $0A^1 = E^1 = 1A^1$; entsprechend fallen je zwei Modellmorphisms zusammen.

2.11 Lemma. Sei $J \subset \{1, \dots, n\}$ und $j = \#J$. Die Normalenschar $(NE_J^n)_\bullet \rightarrow E_J^n$ ist isomorph zum Rückzug von E_\bullet^{n-j} via $E_J^n \xrightarrow{\pi^n|_{\dots}} \mathbb{R}$, genauer: Es gibt genau einen Morphismus $\widehat{\pi^n|_{\dots}}$ von Eckenscharen, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_\bullet^{n-j} & \longleftarrow & (NE_J^n)_\bullet \\ \pi^{n-j} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\pi^n|_{\dots}} & E_J^n \end{array}$$

kommutativ schließt und die ordnungserhaltende Bijektion der Indexmenge J von $(NE_J^n)_\bullet$ auf die Indexmenge $\{1, \dots, n-j\}$ von E_\bullet^{n-j} induziert.

BEWEIS. Nach Definition ist $(NE_J^n)_\bullet \rightarrow E_J^n$ isomorph zum Rückzug von $(E_J^{n\perp})_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ via $E_J^n \xrightarrow{\pi^n|_{\dots}} \mathbb{R}$. Die klassifizierenden Abbildungen von $(E_J^{n\perp})_\bullet$ ist

$$\nu_j^n \circ \alpha_{E^n} = \nu_j^n \circ \beta_n = \beta_j,$$

stimmt also mit der klassifizierenden Abbildung von E_\bullet^{n-j} überein. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 2.3. \square

§ 3 Tubensysteme von Ecken

Tubensysteme

NORMALENEXPONENTIALABBILDUNG

3.1 Sei X eine Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge U des Totalraums eines Vektorbündels $E \rightarrow B$, so daß $X \rightarrow B$ submersiv ist, und ϑ eine riemannsche Metrik des Vertikalbündels $VU \rightarrow U$. Sei $b \in B$, $x \in X_b$ und $v \in V_x U$. Es bezeichne $\gamma_v:]-\delta_v, \varepsilon_v[\rightarrow U_b$ die Geodätische mit maximalem zusammenhängenden Definitionsbereich und $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

$$\begin{array}{ccc} \exp: VU & \supset \longrightarrow & U \\ v & \longmapsto & \gamma_v(1), \text{ falls } 1 < \varepsilon_v \end{array}$$

ist die Exponentialabbildung von U bezüglich ϑ .

$$\begin{array}{ccc} \text{nexp}: NX & \cong & TX^\perp \text{ in } VX \supset \longrightarrow U, \\ v + V_{\varrho(v)}X & \longleftarrow & v \longmapsto \gamma_v(1), \text{ falls } 1 < \varepsilon_v \end{array}$$

wobei $VX \xrightarrow{\varrho} X$ das Vertikalbündel von X bezeichnet, heißt die Normalenexponentialabbildung von X in U bezüglich ϑ . Ihr Keim nahe dem Nullschnitt ist eine Tube von X in U , genannt die Normaltube von X in U .

Sei $E_\bullet \rightarrow B$ eine Eckenschar, η ihre riemannsche Metrik, I ihre Indexmenge und $S := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ das Sphärenbündel von E . Der Isomorphismus $(E \setminus 0_B, \vartheta) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \text{Standard}) \times (S, \eta|_{\cdot})$ definiert eine gegenüber η skalierte riemannsche Metrik ϑ auf $E \setminus 0_B$. Für $\emptyset \neq J \subset I$ ist die Normalenexponentialabbildung von E_J in $E \setminus 0_B$ bezüglich ϑ gegeben als

$$\begin{aligned} NE_J &\longrightarrow E \setminus 0_B, \\ (x, v) &\longmapsto \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|} \cos \|v\| + \frac{v}{\|v\|} \sin \|v\| \right) \end{aligned}$$

wobei $x \in {}^bE_J$ und $v \in {}^bE_J^\perp$.

Definition. Sei $E_\bullet \xrightarrow{\pi} B$ eine Eckenschar i. w. S. und I ihre Indexmenge. Eine Familie $\varphi = (\varphi_J)_{J \subset I}$ heißt ein auf der offenen Teilmenge U von E definiertes Tubensystem der Schar E_\bullet , wenn φ_J für jedes J eine Tube von $U_J := E_J \cap U$ in E ist, so daß gilt:

(T0) φ_J ist bündelhaft, soll heißen: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} NU_J & \supset \xrightarrow{\varphi_J} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_J & \longrightarrow & B \end{array}$$

kommutiert, d. h. die Einschränkungen $N^bU_J \supset \xrightarrow{{}^b\varphi_J} {}^bE$ auf die Fasern existieren und sind Tuben von bU_J in bE .

(T1) φ_\emptyset ist der kanonische Isomorphismus $NU_\emptyset \cong E|_{\pi(U_\emptyset)}$ riemannscher Vektorbündel.

(T2) Für $J \neq \emptyset$ ist φ_J normerhaltend, soll heißen: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} NU_J & \supset \xrightarrow{\varphi_J} & E \\ \downarrow & & \downarrow \|\cdot\| \\ U_J & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

kommutiert.

(T3) Für $J \neq \emptyset$ ist φ_J äquivariant bezüglich der von der Skalarmultiplikation auf E herkommenden $\mathbb{R}_{>0}$ -Operation.

(T4) φ ist $\text{Aut}(E_\bullet)$ -äquivariant.

(T5) φ ist normalenäquivariant, soll heißen: Jedes ${}^b\varphi_J$ ist äquivariant bezüglich der offensichtlichen $O({}^bE_J^\perp)$ -Operationen.

(T6) Falls $\#I = 2$ ist für $\#J = 1$ φ_J die in 3.2 angegebene Normalenexponentialabbildung.

- (T7) Die zur Tube φ_J gehörige riemannsche Metrik von $NU_J \rightarrow U_J$ ist die Einschränkung der zur Normalenschar $(NE_J)_\bullet \rightarrow E_J$ gehörigen riemannschen Metrik von $NE_J \rightarrow E_J$.

BEMERKUNGEN UND FOLGERUNGEN

- (i) Tubensysteme bilden gemäß I 4.8 eine Garbe, weshalb auch von Tubensystemen auf abgeschlossenen Mengen die Rede sein kann.
- (ii) (T6) könnte für jedes I und $\#J = 1$ verlangt werden, benötigt wird es aber nur für $\#I = 2$ wegen der Sonderfälle $\sigma_{(1,1)}$ aus Lemma 5.1 (3) und τ^2 aus 5.3.
- (iii) (T7) dient lediglich der Bequemlichkeit, auf dem Vektorbündel $NU_J \rightarrow U_J$ mit nur einer riemannschen Metrik umgehen zu müssen.
- (iv) Einzeln auftretende Tuben φ_J sollen bereits (T1)–(T7) erfüllen, (T4) freilich nur in der abgeschwächten Form

(T4') φ_J ist $\text{Aut}(E_\bullet, E_J)$ -äquivariant,

wobei $\text{Aut}(E_\bullet, E_J) := \{g \in \text{Aut}(E) \mid g(E_J) = E_J\}$ die relativen Automorphismen bezeichnet. Wähle $b \in B$ und schreibe $\text{Aut}(E_\bullet, E_J) \cong \text{Aut}({}^bE_\bullet, {}^bE_J) \cong (G_J \times \mathfrak{S}_J) \times (G_{J'} \times \mathfrak{S}_{I \setminus J}) \subset O(\text{span } {}^bE) \times O({}^bE_J^\perp)$ gemäß Lemma 2.3 (2) und 2.8. Die verschiedenen Zwecken dienenden Äquivarianzen (T3), (T4') und (T5) ergeben insgesamt eine Äquivarianz von ${}^b\varphi_J$ bezüglich $\mathbb{R}_{>0} \times (G_J \times \mathfrak{S}_J) \times O({}^bE_J^\perp)$.

- (v) (T3), (T4) und (T5) implizieren, daß der „Definitionsbereich“ U von φ unter den jeweiligen Operationen invariant ist.

Lemma. φ_J ist stratifiziert, genauer: Für $K \supset J$ ist φ_J nahe U_J ein Diffeomorphismus zwischen $(NU_J)_{K \setminus J}$ und U_K .

BEWEIS. Wegen (T0) darf B als ein Punkt, folglich $E = V$ angenommen werden. Der Einfachheit halber sei $U = V$. Alle Aussagen über φ_J sind „nahe V_J “ zu lesen. Da φ_J eine Tube ist, gilt $\varphi_J((NV_J)_\emptyset) = \varphi_J(0_{NV_J}) = V_J$. Sei deshalb jetzt $K \setminus J \neq \emptyset$. Erinnerung sei an den Isomorphismus $NV_J \cong V_J \times V_J^\perp$, der sich aus der Definition 2.4 der Normalenschar ergibt, an die Einbettung $V_J \times V_J^\perp \rightarrow V$, $(v, w) \mapsto v + w$, und an die Definition des $K \setminus J$ -Stratums von $(NV_J)_\bullet$ als $V_J \times V_J^\perp_K$.

Sei nun $w \in (V_J^\perp)_{K \setminus J}$. φ_J ist eine Bijektion zwischen $V_J \times \mathbb{R}_{\neq 0} w$ und $V_J + \mathbb{R}_{\neq 0} w$, da φ_J $O(V_J^\perp)$ -äquivariant ist und dies die Mengen der Elemente mit Standgruppe $O(\{v \in V_J^\perp \mid \langle v, w \rangle = 0\})$ sind. Da φ_J als Tube $N\varphi_J = \text{id}_{NV_J}$ erfüllt, muß dann φ_J sogar eine Bijektion zwischen $V_J \times \mathbb{R}_{>0} w$ und $V_J + \mathbb{R}_{>0} w$ sein. Da für $v \in V_J$ und $\|w\|$ klein die Äquivalenzen $(v, w) \in (NV_J)_{K \setminus J} \Leftrightarrow w \in (V_J^\perp)_{K \setminus J} \Leftrightarrow v + w \in V_K$ gelten, ist dann φ_J eine Bijektion zwischen $(NV_J)_{K \setminus J}$ und V_K . \square

Fasse die Strata gleicher Höhe zu einem Stratum zusammen: $E_j := \bigcup_{\#J=j} E_J$. Die neue Stratifizierung $\{E_j \mid 0 \leq j \leq \#I\}$ ist lokal gleich der bisher stets betrachteten Stratifizierung $\{E_J \mid J \subset I\}$. Auch lassen sich für gegebenes j die Tuben $(\varphi_J)_{\#J=j}$

zu einer Tube φ_j von $U_j := \bigcup_{\#J=j} U_J$ zusammenfassen. Ich benutze ab jetzt je nach Bequemlichkeit E_J, U_J und φ_J oder E_j, U_j und φ_j .

Lemma. *Es gibt eine Operation $\varrho: G \times W \rightarrow W$ einer kompakten Liegruppe G auf einer Umgebung W von E_j , so daß φ_j genau dann normalenäquivariant ist, wenn φ_j G -äquivariant ist.* 3.4

BEWEIS. Sei $J \subset I$ mit $\#J = j$ und $b, c \in B$. Die Ecken ${}^bE_J^\perp$ und ${}^cE_J^\perp$ haben selbe Dimension und Indexmenge. Nach Lemma 2.1 (1) gibt es einen kanonischen Isomorphismus $f_c: {}^bE_J^\perp \rightarrow {}^cE_J^\perp$ der unterliegenden euklidischen Vektorräume. f_c hängt differenzierbar von c ab. Ferner ist

$$\begin{aligned} +: E_J \times_B E_J^\perp &\longrightarrow E \\ (x, v) &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

eine offene Einbettung; ihr Bild heie W' . Definiere die Operation $\tilde{\varrho}$ als

$$\begin{aligned} O({}^bE_J^\perp) \times W' &\longrightarrow W' \\ (g, x + v) &\longmapsto x + f_c(g(f_c^{-1}(v))) \end{aligned}$$

Wähle für jedes K mit $\#K = j$ ein $\sigma_K \in \text{Aut}(E_\bullet)$ mit $\sigma_K(J) = K$. Wähle eine $\text{Aut}(E_\bullet, E_J)$ -invariante Umgebung W'' von E_J mit der Eigenschaft

$$K \neq J \Rightarrow \sigma_K(W'') \cap W'' = \emptyset.$$

Die Vereinigung $W := \bigcup_{\#K=j} \sigma_K(W'')$ ist $\text{Aut}(E_\bullet)$ -invariant. Einschränken von $\tilde{\varrho}$ auf W'' und anschließendes Fortsetzen auf W mit Hilfe der σ_K definiert ein ϱ wie gewünscht. \square

KANONISCHE TUBE

Das Stratum E_J einer Schar $E_\bullet \rightarrow B$ besitzt sogar eine kanonische Tubenabbildung, nämlich das Kompositum des Isomorphismus 2.5 (1) mit der eben bereits verwendeten offenen Einbettung:

$$\begin{aligned} NE_J &\cong E_J \times_B E_J^\perp \longrightarrow E \\ (x, v) &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

Zusammen mit der riemannschen Metrik aus 2.5 (2) ist dies eine kanonische Tube von E_J in E .

Die folgende Konstruktion von Ts-Auswahlen läßt sich jedoch nicht dadurch vereinfachen, daß man für jedes Stratum diese kanonische Tube wählt, da sie (T2) nicht erfüllt, (T2) andererseits im Hinblick auf die Sonderfälle $\sigma_{(1,1)}$ aus Lemma 5.1 (3) und τ^2 aus 5.3 eine unentbehrliche Forderung an ein Tubensystem darstellt.

ZURÜCKZIEHEN VON TUBENSYSTEMEN

3.5 Lemma. Zu einem Morphismus

$$\begin{array}{ccc}
 E'_{\bullet} & \xrightarrow{f} & E_{\bullet} \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\
 B' & \xrightarrow{c} & B
 \end{array} \tag{b}$$

von Eckenscharen *i. w. S.* mit *oBdA* gleicher Indexmenge *I* und einem auf *U* definierten Tubensystem φ von $E_{\bullet} \rightarrow B$ existiert genau ein auf $U' := f^{-1}(U)$ definiertes Tubensystem ${}^*\varphi$, so daß für jedes $J \subset I$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 U' & \xrightarrow{f|_{..}} & U \\
 {}^*\varphi_J \uparrow & & \uparrow \varphi_J \\
 \cap & & \cap \\
 NU'_J & \xrightarrow{N(f|_{..})} & NU_J \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{(\#)} \\
 \pi'(U') & \xrightarrow{c|_{..}} & \pi(U) \\
 \pi'|_{..} \uparrow & & \uparrow \pi|_{..} \\
 U'_J & \xrightarrow{f|_{..}} & U_J
 \end{array}$$

kommutiert (vgl. Bemerkung (3) aus 2.5).

Anmerkung: In einem mehr-als-zwei-dimensionalen Diagramm steht „ \downarrow “ pauschal für die Bündelprojektionen.

BEWEIS. Bemerkung (3) aus 2.5 und Eigenschaft (T0) aus Definition 3.3 zeigen die Kommutativität des Diagramms (#) abgesehen von ${}^*\varphi_J$. Da (b) ein Pullback-Diagramm ist, gibt es genau eine Möglichkeit, ${}^*\varphi_J$ zu definieren. \square

Auswahlen

$M_s^{\leq m}$ bezeichne die Menge der in 2.10 definierten Modellscharen der Länge höchstens $m+1$. Eine Familie $U = (U^{E_{\bullet}})_{E_{\bullet} \in M_s^{\leq m}}$ heißt eine Teilmengenauswahl bis zur Länge $m+1$, wenn $U^{E_{\bullet}}$ für $E_{\bullet} \in M_s^m$ eine Teilmenge von E ist und für $E_{\bullet} \in M_s^{\leq m-1}$ sogar $U^{E_{\bullet}} = E$ gilt. Dasjenige U mit $U^{E_{\bullet}} = \emptyset$ bzw. $U^{E_{\bullet}} = E$ für $E_{\bullet} \in M_s^m$ heiße die leere

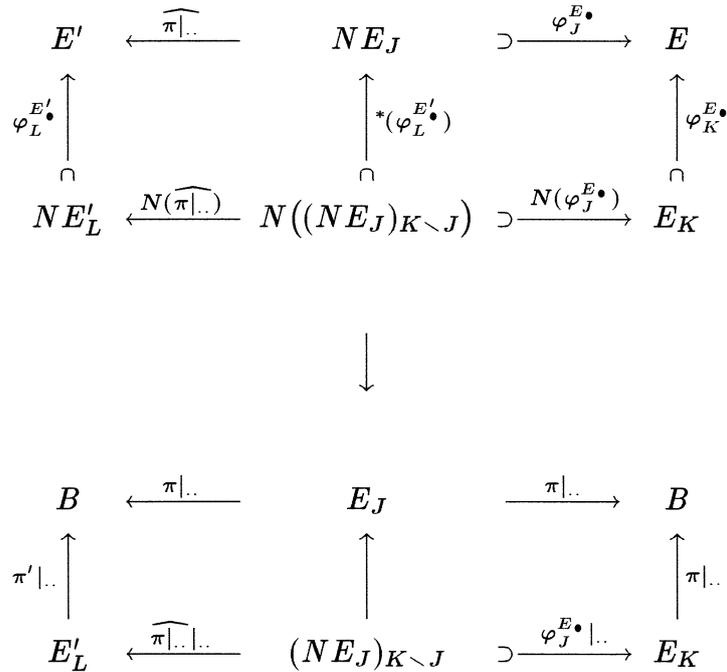
bzw. die volle Auswahl bis zur Länge $m + 1$. Die Familie $(E)_{E_\bullet \in \text{Ms}}$ heie die Auswahl bis zur Länge ∞ .

Sei $l \leq m \in \mathbb{N}$. Eine Teilmengenauswahl U bis zur Länge m heißt eine Teilmengenauswahl vom Typ (m, l) , wenn U^{E_\bullet} für $E_\bullet \in \text{Ms}^m$ eine Umgebung von $E_1 \cup \dots \cup E_l$ in E ist. Beachte, daß U^{E_\bullet} für $E_\bullet \in \text{Ms}^m$ keine Umgebung von E_0 zu sein braucht. Verlangte man, daß m und l maximal sind, wäre jede Auswahl von nur einem Typ.

Definition. Eine Familie $\varphi = (\varphi^{E_\bullet})_{E_\bullet \in \text{Ms}^{\leq m}}$ heißt eine auf einer Teilmengenauswahl U definierte Auswahl von Tubensystemen — kurz: Ts-Auswahl —, wenn φ^{E_\bullet} ein auf U^{E_\bullet} definiertes Tubensystem von E_\bullet ist, so daß gilt:

3.6

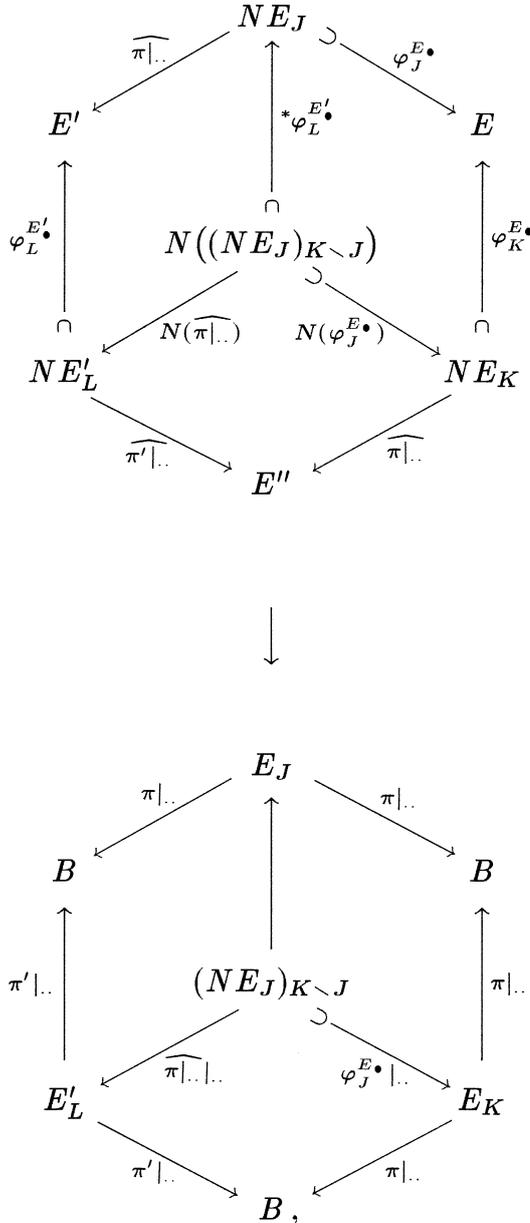
- (TA1) Verträglichkeit mit Modellmorphismen: Ist $f: E'_\bullet \rightarrow E_\bullet$ ein Modellmorphismus der Länge hchstens $m + 1$, so ist $\varphi^{E'_\bullet}$ der Rückzug von φ^{E_\bullet} mittels f , d. h., da die Modellmorphismen Inklusionen sind, $\varphi^{E'_\bullet}$ ist die Einschränkung von φ^{E_\bullet} auf E'_\bullet .
- (TA2) Produkteigenschaft an den Enden: Für t aus einer geeigneten Umgebung von $] - \infty, 0]$ ist ${}^t\varphi^{E^n} = {}^0\varphi^{E^0}$, und für t aus einer geeigneten Umgebung von $[1, \infty[$ ist ${}^t\varphi^{E^n} = {}^1\varphi^{E^0}$.
- (TA3) Normalenabstieg: Sei $E_\bullet \xrightarrow{\pi} B$ eine Modellschar der Länge $n + 1 \leq m + 1$, J eine j -elementige echte Teilmenge der Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ von E_\bullet und $E'_\bullet \xrightarrow{\pi'} B$ die E_\bullet entsprechende Modellschar der Länge $n + 1 - j$. Dann kommutiert für jede zwischen J und I liegende k -elementige Menge K das Diagramm



(vgl. Lemma 2.11 und Lemma 3.5), wobei L eine $(k - j)$ -elementige Teilmenge der Indexmenge $\{1, \dots, n - j\}$ von E'_\bullet ist. (Aus Gründen der Lesbarkeit steht im Diagramm E, E_J etc. anstelle von $U^{E_\bullet}, U^{E_\bullet}_J$ etc..)

(TA1) und (TA2) implizieren entsprechende Eigenschaften für U . Länge und Typ von φ richten sich nach Länge und Typ von U . Wird die Teilmengenauswahl U nicht angegeben, so ist die volle Auswahl gemeint; wird auch die Länge nicht angegeben, so ist die Länge ∞ gemeint.

3.7 Lemma. Sei φ eine auf U definierte Ts-Auswahl bis zur Länge $m + 1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Über die Bezeichnungen in (TA2) hinaus sei $E'' \xrightarrow{\pi''} B$ die entsprechende Modellschar der Länge $n + 1 - k$. Dann kommutiert das Diagramm

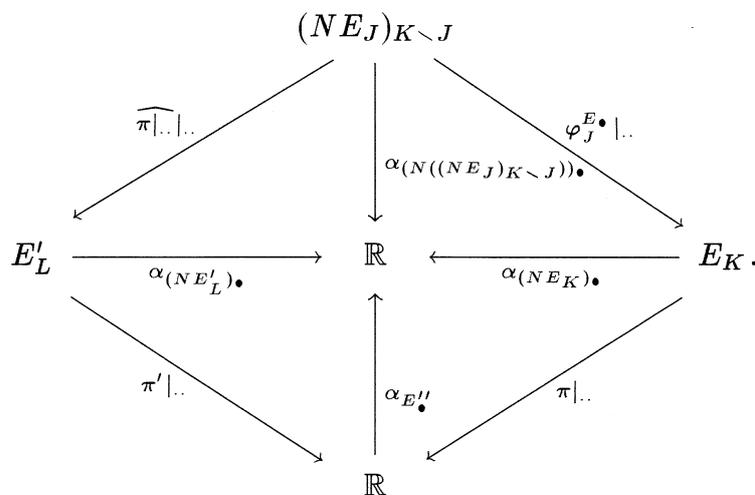


wobei wiederum E, E_J etc. anstelle von $U^{E\bullet}, U^{E\bullet}_J$ etc. steht.

BEWEIS. Zur Verfügung stehen der Normalenabstieg (TA3) der Ts-Auswahl φ , die Definition 2.4 der Normalenscharen, die unter geeigneten Voraussetzungen eindeutige Existenz 2.3 von Morphismen von Scharen und die Bemerkung 2.5 (3) über das Normal

eines Morphismus von Scharen. Die auftretenden Indexmengen sind sämtlich Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ und alle Abbildungen zwischen ihnen sollen ordnungserhaltend sein.

Sind E_\bullet — und damit auch E'_\bullet und E''_\bullet — Scharen von Ecken im *engeren* Sinne, so kommutiert das um die jeweiligen klassifizierenden Abbildungen ergänzte Diagramm



Insgesamt folgt die Kommutativität des großen Diagramms. \square

Existenz

NIEDERE DIMENSIONEN

3.8

Es gibt genau eine Ts-Auswahl φ bis zur Länge $2 + 1$: Sei $E_\bullet \in Ms^{\leq 2}$. Wegen (T1) ist $\varphi_0^{E_\bullet}$ der kanonische Isomorphismus $N0_B \cong E$. Da E_n offen in E ist, ist $\varphi_n^{E_\bullet}$ der kanonische Isomorphismus $NE_n \cong E_n$. Durch (T6) ist $\varphi_1^{E_\bullet}$ für $l(E_\bullet) = 3$ vorgegeben. Umgekehrt erfüllt dieses φ die Bedingungen (T0) bis (T7) und (TA1) bis (TA3).

Proposition. *Auswahlen von Tubensystemen existieren.*

3.9

BEWEIS. Damit von Fortsetzungen die Rede sein kann, seien Teilmengenauswahlen in diesem Beweis stets Auswahlen *abgeschlossener* Teilmengen. Da durch (T7) die riemannschen Metriken festliegen, interessieren von Tuben nur die Tubenabbildungen.

Ts-Auswahlen vom Typ $(1, 0)$ existieren trivialerweise; siehe auch 3.8. Eine Ts-Auswahl vom Typ $(n, j - 1)$ läßt sich, wie weiter unten bewiesen wird, zu einer Ts-Auswahl vom Typ (n, j) fortsetzen. Eine Ts-Auswahl vom Typ (n, n) setzt sich durch Hinzunahme der kanonischen Tuben der 0-Strata fort auf die volle Teilmengenauswahl der Länge $n + 1$ und weiter durch Hinzunahme der leeren Tuben auf die leere Teilmengenauswahl der Länge $n + 2$, d. h. zu einer Ts-Auswahl vom Typ $(n + 1, 0)$. Mit einem Standardschluß aus der Rekursionstheorie folgt die Existenz von Ts-Auswahlen bis zur Länge ∞ , also von Ts-Auswahlen schlechthin.

Sei nun φ eine auf einer Teilmengenauswahl A vom Typ $(n, j - 1)$ definierte Ts-Auswahl, oBdA $n \geq 3$. Dann läßt sich φ zu einer Ts-Auswahl ψ vom Typ (n, j) fortsetzen:

Die Tube $\varphi_j^{C^n}$ läßt sich zu einer Tube χ^{C^n} von ganz C_j^n fortsetzen: Schränke $\varphi_j^{C^n}$, das auf $A_j^{C^n}$ definiert ist, auf $A_j^{C^n} \cap S$ ein, S die Einheitskugel von C^n . Laut Lemma 3.4 lassen sich (T4) und (T5) als Äquivarianz bezüglich einer kompakten Liegruppe auffassen. Gemäß Satz I 4.7 existiert eine äquivariante Fortsetzung $\tilde{\chi}$ auf ganz $C_j^n \cap S$. Die $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariante Fortsetzung von $\tilde{\chi}$ auf ganz \mathbb{C}_j^n heie χ^{C^n} . Die jeweiligen Einschränkungen von χ^{C^n} mögen χ^{R^n} und χ^{E^n} heißen. Analog sei χ^{C^n} eine Fortsetzung von $\varphi_j^{C^n}$ auf ganz \mathbb{C}_j^n und χ^{R^n} und χ^{E^n} die jeweiligen Einschränkungen.

Die Tuben $\varphi_j^{E^n}$, $\text{id}_{]-\infty, \varepsilon[} \times \chi^{E^n}$ und $\text{id}_{]1-\varepsilon, \infty[} \times \chi^{E^n}$, $\varepsilon > 0$ geeignet, besitzen eine gemeinsame Fortsetzung χ^{E^n} auf ganz E_j^n : Zunächst stimmen sie auf ihren gemeinsamen Definitionsbereichen überein. Schneide wie oben mit dem Sphärenbündel $S := \{x \in E^n \mid \|x\| = 1\}$. Schreibe wie oben (T4) und (T5) als Äquivarianz. Da die Projektion auf die Basis der Schar $E_j^n \rightarrow \mathbb{R}$ submersiv ist, garantiert Satz I 4.7 nun sogar eine mit der Projektion verträgliche — d. h. (T0) erfüllende — äquivariante Fortsetzung auf ganz $E_j^n \cap S$. Nenne schließlich die $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariante Fortsetzung auf E_j^n der auf $E_j^n \cap S$ konstruierten Tube χ^{E^n} .

Elementares topologisches Basteln führt zu einer Auswahl A' abgeschlossener Teilmengen, so daß für $E_\bullet \in \text{Ms}^n$ A^{E_\bullet} eine Umgebung von E_j in E ist und $\chi^{E_\bullet} = \varphi^{E_\bullet}$ nahe $A^{E_\bullet} \cap A'^{E_\bullet}$ gilt. Setze $\omega^{E_\bullet} := \varphi^{E_\bullet}$ für $E_\bullet \in \text{Ms}^{\leq n-1}$ und $\omega^{E_\bullet} := \chi^{E_\bullet} \circ (\varphi^{(NE_j)_\bullet})$ für $E_\bullet \in \text{Ms}^n$, wobei $\varphi^{(NE_j)_\bullet}$ den Rückzug von φ^{E_\bullet} mittels $\varphi_j^{E_\bullet}$ bezeichnet. Man verifiziert, daß ω eine auf A' definierte Ts-Auswahl ist.

$$\psi := \begin{cases} \varphi & \text{nahe } A \\ \omega & \text{nahe } A' \end{cases}$$

ist daher eine wohldefinierte, φ fortsetzende Auswahl von Tubensystemen auf $A \cup A'$, d. h. vom Typ (n, j) . \square

§ 4 Glättungen von Ecken

In diesem Paragraphen treten nur Eckenscharen im engeren Sinne auf.

HALBRAUMSCHAREN

Eine Eckenschar $H_\bullet \rightarrow B$ heißt eine Halbraumschar, wenn ${}^b H_\bullet$ für jedes $b \in B$ ein Halbraum ist. Bezeichne die gemäß Lemma 2.3 (2) zu einer Eckenschar $E_\bullet \rightarrow B$ gehörige Halbraumschar mit $\tilde{E}_\bullet \rightarrow B$. Die zur Modellschar $E_\bullet \xrightarrow{\pi^n} \mathbb{R}$ gehörige Halbraumschar heie $H_\bullet^n \xrightarrow{e^n} \mathbb{R}$. Ihr unterliegendes Vektorbündel ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{R}$; es gilt $H_\bullet^n \cong \mathbb{R} \times {}^0 E_\bullet^n$.

Glättungen

Definition. Sei $E_\bullet \rightarrow B$ eine Eckenschar mit Indexmenge I und U eine offene Teilmenge von E , desweiteren $H_\bullet \rightarrow C$ eine Halbraumschar und $f: B \rightarrow C$ eine (differenzierbare) Abbildung. Eine Abbildung $g: U \rightarrow H$ zusammen mit einem Homomorphismus $\text{Aut}(E_\bullet) \rightarrow \text{Aut}(H_\bullet)$ heißt eine auf U definierte Glättung von E_\bullet nach H_\bullet über f , wenn gilt:

4.1

(G0) g ist bündelhaft, soll heißen:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

kommutiert, d. h. die Einschränkungen ${}^bU \xrightarrow{{}^bg} {}^bH$ existieren.

(G1) g ist faserweise eine topologische Einbettung.

(G2) g ist normerhaltend.

(G3) g ist $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant.

(G4) g ist $(\text{Aut}(E_\bullet) \rightarrow \text{Aut}(H_\bullet))$ -äquivariant.

(G5) g ist stratifiziert.

(G6) Für ein und damit für jedes $c \in C$ geht $g(U)$ unter der kanonischen Trivialisierung 2.3 (2) in ein Produkt über:

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftarrow & C \times \mathcal{H} \\ \cup & & \cup \\ g(U) & \longleftarrow & C \times {}^c(g(U)). \end{array}$$

(G3) und (G4) implizieren die $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(E_\bullet)$ -Invarianz von U .

Der Homomorphismus $\text{Aut}(E_\bullet) \rightarrow \text{Aut}(H_\bullet)$ wird nicht mit angegeben, wenn er sich von selbst versteht oder durch g bereits festliegt. Ist f ein Diffeomorphismus und $U = E$, so ist g ein Homöomorphismus und jedes g_I ein Diffeomorphismus. Entfällt der Zusatz „über f “, so ist gemeint, daß $f = \text{id}_B$ und H_\bullet die zu E_\bullet gehörige Halbraumschar \tilde{E}_\bullet ist. Eine Glättung g über f faktorisiert kanonisch in eine Glättung g_1 und einen Morphismus g_2 über f :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g_1} & \tilde{E} & \xrightarrow{g_2} & H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\text{id}} & B & \xrightarrow{f} & C. \end{array}$$

4.2 Lemma. Sei g eine auf U definierte Glättung über c , (\hat{f}, f) und (\hat{h}, h) seien Morphismen von Eckenscharen und c' eine auf $V \subset_{\text{offen}} B'$ definierte Abbildung, so daß

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & \xrightarrow{\hat{f}} & E & \searrow g & \\
 & & H' & \xrightarrow{\hat{h}} & H \\
 & & \downarrow & & \\
 B' & \xrightarrow{f} & B & \searrow c & \\
 & & C' & \xrightarrow{h} & C
 \end{array}$$

kommutiert. Dann existiert genau eine auf $\hat{f}^{-1}(U) \cap E'|_V$ definierte, das Diagramm kommutativ schließende Glättung *g von E'_\bullet nach H'_\bullet über c' . Diese heie der Rückzug von g mittels der gegebenen Daten.

DER BEWEIS ist trivial. \square

Glttungsfolgen

Die Definition 4.3 bedarf einiger Vorbereitungen:

(1) $E_\bullet^n \xrightarrow{\pi^n} \mathbb{R}$ bezeichne weiterhin die Modell-Eckenschar der Länge $n + 1$ aus 2.10 und $H_\bullet^n \xrightarrow{\varrho^n} \mathbb{R}$ die zu E_\bullet^n gehörige Halbraumschar.

Sei $\varphi = (\varphi^{E_\bullet})_{E_\bullet \in \text{Ms}}$ eine Ts-Auswahl. In diesem Paragraphen werden nur die Tubensysteme $\varphi^{E_\bullet^n}$ der Eckenscharen im engeren Sinne benötigt; diese werden nun kürzer mit φ^n bezeichnet. ${}^0\varphi^n$ ist ein Tubensystem von ${}^0E_\bullet^n$, folglich ist $\text{id}_{\mathbb{R}} \times {}^0\varphi^n$ ein Tubensystem von $H_\bullet^n \cong \mathbb{R} \times {}^0E_\bullet^n$, welches das zu φ gehörige Tubensystem von $H_\bullet^n \rightarrow \mathbb{R}$ heie und mit ψ^n bezeichnet werde.

(2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ist der Totalraum der Eckenschar $E_\bullet^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie auch der zugehörigen Halbraumschar $H_\bullet^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Identifizieren von \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} ist das höchste Stratum

$$\begin{aligned}
 E_2^2 &= \{ (t, r e^{i(\frac{\pi}{4} + \gamma)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid r > 0, |\gamma| < \text{arccot}(a_2(t)) \} \quad \text{bzw.} \\
 H_2^2 &= \{ (t, r e^{i(\frac{\pi}{4} + \gamma)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid r > 0, |\gamma| < \frac{\pi}{2} \}.
 \end{aligned}$$

Dabei sei arccot durch $\cot \circ \text{arccot} = \text{id}$ und $\text{arccot}(\mathbb{R}) =]0, \pi[$ definiert. Definiere $\lambda^1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\lambda^1(t) := \frac{\text{Öffnungswinkel von } {}^tH^2}{\text{Öffnungswinkel von } {}^tE^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\text{arccot } a_2(t)}.$$

Setze $\lambda^n := 1$ für $n \neq 1$.

(3) Das Normalenbündel NE_J^n des Stratums E_J^n läßt sich laut Lemma 2.11 folgendermaßen als Pullback schreiben:

$$\begin{array}{ccc} E^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\pi^n|_{\cdot}}} & NE_J^n \\ \pi^{n-j} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\pi^n|_{\cdot}} & E_J^n. \end{array}$$

Dies gilt erst recht bei den Halbraumscharen:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\varrho^n|_{\cdot}}} & NH_J^n \\ \varrho^{n-j} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\varrho^n|_{\cdot}} & H_J^n. \end{array}$$

Eine Glättung $E^{n-j} \xrightarrow{g} H^{n-j}$ und eine Abbildung $E_J^n \supset \xrightarrow{f} H_J^n$ über $\text{id}_{\mathbb{R}}$ bestimmen daher gemäß Lemma 4.2 die zurückgezogene Glättung $*g$:

$$\begin{array}{ccc} E^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\pi^n|_{\cdot}}} & NE_J^n \\ \searrow g & & \searrow *g \\ & H^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\varrho^n|_{\cdot}}} & NH_J^n \\ & & & \downarrow \\ & & & \mathbb{R} \xleftarrow{\pi^n|_{\cdot}} E_J^n \supset \xrightarrow{f} H_J^n \\ & & & \swarrow \text{id} \quad \searrow \\ & & & \mathbb{R} \xleftarrow{\varrho^n|_{\cdot}} \end{array}$$

g und $*g$ möchte ich noch mit dem zu ihrer Kodimension gehörigen Faktor λ^{n-j} aus (2) skalieren: $\lambda^{n-j}g$, genauer $(\lambda^{n-j} \circ \pi^{n-j}) \cdot g$, bezeichne die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} E^{n-j} & \longrightarrow & H^{n-j}; \\ x & \longmapsto & \lambda^{n-j}(\pi^{n-j}(x)) \cdot g(x) \end{array}$$

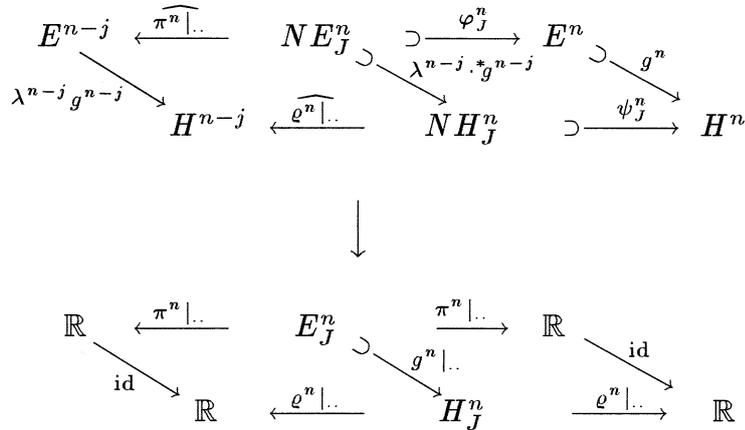
entsprechend sei $\lambda^{n-j} \cdot *g$ definiert. Da (G2) verletzt ist, sind dies keine Glättungen mehr.

Definition. Seien $l \leq m \in \mathbb{N}$ und φ eine Ts-Auswahl. Eine Familie $g = (g^n)_{1 \leq n \leq m}$ heißt eine Glättungsfolge vom Typ (m, l) , wenn gilt: g^m ist eine auf einer offenen Umgebung U von $E_1^m \cup E_2^m \cup \dots \cup E_l^m$ definierte Glättung von E_\bullet^m nach H_\bullet^m , und für $n < m$ ist g^n eine auf ganz E^n definierte Glättung von E^n nach H^n , so daß für $n \leq m$ gilt:

4.3

(GF2) Die Enden sind Produkte: Für t aus einer geeigneten Umgebung W von $]-\infty, 0]$ ist ${}^t g^n = \text{id}$, und für t aus einer geeigneten Umgebung W von $[1, \infty[$ ist ${}^t g^n = {}^1 g^n$.

(GF3) Normalenabstieg: Für $\emptyset \subsetneq J \subsetneq I$ kommutiert das Diagramm



nahe dem Nullschnitt von NU_J bzw. von NE_J^n . Die linke Hälfte des Diagramms ergibt sich aus der vorbereitenden Bemerkung (3).

(GF4) Sonderfall: Soweit definiert, ist g^2 auf dem Stratum der Höhe $2 + 1$ die „Streckung des Winkels“: $g^2(t, re^{i(\frac{\pi}{4} + \gamma)}) = (t, e^{i(\frac{\pi}{4} + \lambda^1(t)\gamma)})$ in der Notation der vorbereitenden Bemerkung (2).

Eine Familie $g = (g^n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ heißt eine Glättungsfolge (schlechthin), wenn g^n für jedes n eine auf ganz E^n definierte Glättung von E^n nach H^n ist, so daß (GF2)–(GF4) erfüllt ist.

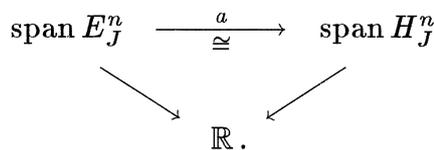
Existenz

4.4 Proposition. *Zu jeder Ts-Auswahl φ existiert eine Glättungsfolge g .*

BEWEIS. Gehe wie im Beweis von Proposition 3.9 vor. Der Induktionsanfang ist trivial.

Sei g deshalb eine Glättungsfolge vom Typ $(n, j - 1)$. Der Definitionsbereich von g^n sei offen und heiße U . Zu konstruieren ist eine nahe $E_1^n \cup E_2^n \cup \dots \cup E_j^n$ definierte Glättung h von E^n nach H^n mit „ $h = g^n$ nahe $E_1^n \cup E_2^n \cup \dots \cup E_{j-1}^n$ “ und „ h ist zusammen mit $(g^k)_{1 \leq k \leq n-1}$ eine Glättungsfolge vom Typ (n, j) “.

Sei $J \subset I$ mit $\#J = j$. Das folgende ist $\text{Aut}(E^n, E_J^n)$ -äquivariant zu lesen. Die Einschränkung $g_J^n: U_J \rightarrow H_J^n$ von g^n auf das J -Stratum ist eine differenzierbare offene Einbettung. Gemäß Lemma 2.3 (1) sind die den tangentialen Eckenscharen $(\text{span } E_J^n)_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ und $(\text{span } H_J^n)_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ zugrunde liegenden riemannschen Vektorbündel kanonisch isomorph:

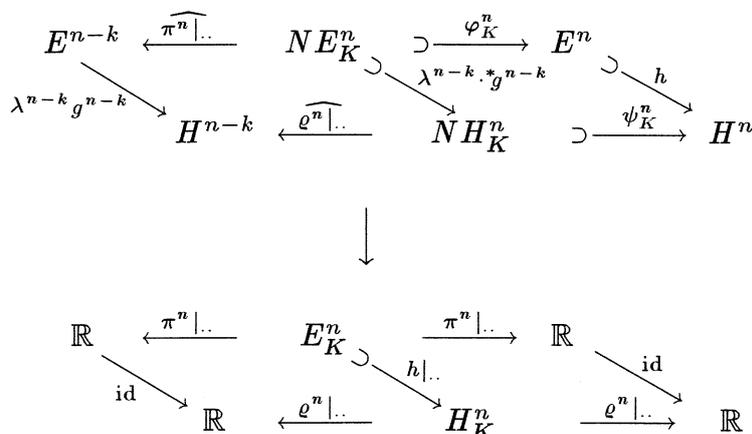


$g^n(U_J^n) = \mathbb{R} \times {}^0U_J^n \xrightarrow{a \circ (g_J^n)^{-1}} \text{span } H_J^n = \mathbb{R} \times {}^0H_J^n$ läßt sich als eine Isotopie offener Einbettungen auffassen. Schneiden mit dem Einheitssphärenbündel S von $\text{span } H_J^n \rightarrow \mathbb{R}$ liefert eine Isotopie offener Einbettungen $\mathbb{R} \times {}^0(U_J^n \cap S) \rightarrow \mathbb{R} \times S$ mit kompaktem Komplement. Setze diese gemäß Lemma I 8.6 zu einer Diffeotopie $\mathbb{R} \times {}^0S \rightarrow \mathbb{R} \times {}^0S$ fort. Setze diese $\mathbb{R}_{>0}$ -äquivariant zu $\mathbb{R} \times {}^0(\text{span } H_J^n \setminus \text{Nullschnitt}) \rightarrow \mathbb{R} \times {}^0(\text{span } H_J^n \setminus \text{Nullschnitt})$ fort. Schränke diese auf das J -Stratum ein und komponiere mit a^{-1} .

Das Ergebnis ist ein Diffeomorphismus $f: E_J^n \rightarrow H_J^n$ über \mathbb{R} mit Produkteigenschaft an den Enden und $f = g_J^n$ nahe $E_1^n \cup \dots \cup E_{j-1}^n$. Für $j = n$ entfällt das Einschränken auf das J -Stratum. Ersetze, falls $n = 2$ und $\#J = 2$, f auf dem J -Stratum durch die in (GF4) geforderte Streckung des Winkels.

Definiere nun h nahe $E_1^n \cup \dots \cup E_{j-1}^n$ als g^n , nahe E_j^n durch den Normalenabstieg über das J -Stratum — in (GF3) ist dabei statt $g^n|_{\cdot}$ das gerade konstruierte f zu nehmen — und nahe E_j^n für $\#J' = j$ durch die Forderung der $\text{Aut}(E_{\bullet}^n)$ -Äquivarianz.

h ist wohldefiniert und hat die verlangten Eigenschaften: Nichttrivial ist lediglich der Nachweis, daß nahe E_j^n auch der Normalenabstieg über ein K mit $J \subsetneq K \subsetneq I$ funktioniert, d. h. daß



in gleichzeitiger Nähe des J - und des K -Stratums kommutiert, wobei $k := \#K$. Betrachte dazu das auf der nächsten Seite abgebildete Diagramm.

Wegen $J \subsetneq K \subsetneq I$ ist $j \leq n - 2$, daher $\lambda^{n-j} = 1$. L bezeichnet eine $(k - j)$ -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n - j\}$.

Die linke Hälfte des Diagramms kommutiert nach Lemma 3.7. Die analog aufgebaute rechte Hälfte kommutiert daher ebenfalls. Der Normalenabstieg für g^n über das J -Stratum und der Normalenabstieg für g^{n-j} über das L -Stratum gelten. Die Pullbacks von Glättungen gemäß Lemma 4.2 existieren eindeutig.

Mittels Diagrammjagd, wobei wegen der vielen Pullbacks manche Schlüsse auch gegen die Pfeilrichtung erlaubt sind, folgt daraus das Kommutieren aller Quadrate des obigen Diagramms, daraus wiederum mit graphentheoretischen Überlegungen die Kommutativität des gesamten Diagramms. \square

$G(a)$ die Untergruppe $\{\lambda \in T^n \mid \omega_a(\lambda) = 1\}$ von T^n und σ_a die orthogonale Darstellung von $G(a)$ auf \mathbb{C}^n . Laut Lemma 1.7 (2) ist σ_a prim oder $G(a)$ trivial genau dann, wenn $\forall \nu: a_\nu \neq 0$. Wegen $\sigma_a \sim \sigma_{-a}$ setze ich ab jetzt $a \in (\mathbb{N} \setminus 0)^n$ voraus. Schließlich sei I stets die Indexmenge $\{1, \dots, n\}$.

ÄQUIVALENZ UND NORMALISATOREN

Setze $n_k := \#\{\nu \in I \mid a_\nu = k\}$; natürlich ist $\sum_k n_k = n$.

Lemma.

5.1

- (1) Für $a, b \in (\mathbb{N} \setminus 0)^n$ sind die Darstellungen σ_a und σ_b genau dann äquivalent, wenn b aus a durch eine Permutation der Einträge hervorgeht.
- (2) Für $a \neq (1, 1)$ ist

$$\text{Aut}(\sigma_a) := \text{Nor}_{O(\mathbb{C}^n)} G(a) = T^n \times \left(\mathbb{Z}_2 \times \prod_k \mathfrak{S}_{n_k} \right) \subset O(\mathbb{C}^n) \times \mathfrak{S}_n,$$

wobei \mathbb{Z}_2 durch komplexe Konjugation auf \mathbb{C}^n operiert und \mathfrak{S}_{n_k} durch Permutation derjenigen komplexen Koordinatenachsen \mathbb{C}_ν mit $a_\nu = k$.

- (3) Es ist $\text{Aut}(\sigma_{(1,1)}) = O(\mathbb{C}^2)$.

BEWEIS. Zu (1) und (2): Die Gewichte von σ_a sind die Einschränkungen der Gewichte $\text{pr}_i: T^n \rightarrow S^1$ und $\text{pr}_i^{-1}: T^n \rightarrow S^1, \lambda \mapsto \lambda_i^{-1}$, der Darstellung $T^n \subset O(\mathbb{C}^n)$. Genau dann gibt es $i \neq j$ mit $\text{pr}_i|_{G(a)} = \text{pr}_j|_{G(a)}$ oder $\text{pr}_i|_{G(a)} = \text{pr}_j^{-1}|_{G(a)}$, wenn $a = (1, 1)$ oder $a = (2)$ ist. Ansonsten sind die isotypischen Komponenten von σ_a die komplexen Koordinatenachsen und treten mit Vielfachheit 1 auf.

Für (3) siehe Proposition I 5.10. \square

(1) legt nahe, durch die Forderung $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ eindeutige Repräsentanten für die Scheibentypen $[\sigma_a]$ zu erhalten.

SCHEIBENDIAGRAMM UND NORMALENBÜNDEL

5.2

Ich vergleiche den komplexen Raum \mathbb{C}_\bullet^n (siehe 2.6) mit dem äquivarianten Vektorraum σ_a . Sei $\emptyset \neq J \subset I$ und $j = \#J$. Das J -Stratum von \mathbb{C}_\bullet^n ist $\mathbb{C}_J^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in J\}$. Sein Normalenbündel ist trivial:

$$\begin{aligned} N\mathbb{C}_J^n &\cong \mathbb{C}_J^n \times \mathbb{C}^{n-j} \\ \|x\| \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Big|_x &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

Die Standgruppe von $x \in \mathbb{C}_J^n$ ist $\{g \in G(a) \mid g_i = 1 \text{ für } i \in J\} \cong G(a_{I \setminus J})$, wobei $a_K := (a_i)_{i \in K}$. Die Gruppe $G(a_{I \setminus J})$ operiert auf der Faser von $N\mathbb{C}_J^n$ durch $\sigma_{a_{I \setminus J}}$, damit ist $\Delta(\sigma_a) = \{[\sigma_{a_K}] \mid K \subset I\}$. Die Stratifizierung $\{\mathbb{C}_J^n \mid J \subset I\}$ von \mathbb{C}^n als Ecke i. w. S. verfeinert die Scheibentypenstratifizierung der $G(a)$ -Mannigfaltigkeit \mathbb{C}^n : Das Hauptstratum ist wegen $G(1) = \{1\}$ die Vereinigung der \mathbb{C}_J^n mit $J = I$ oder $J = I \setminus \{k\}$ und $a_k = 1$, die anderen \mathbb{C}_J^n sind die Zusammenhangskomponenten der jeweiligen Scheibentypenstrata.

DIE DARSTELLUNGEN τ^n

5.3 In §1 waren Q^{n-1} als die Untergruppe $\{ \lambda \in \mathbb{Z}_2^n \mid \prod_{\nu=1}^n \lambda_\nu = 1 \}$ von \mathbb{Z}_2^n und τ^n als die orthogonale Darstellung von Q^{n-1} auf \mathbb{R}^n definiert worden.

Für τ^n gelten analoge, z. T. sogar einfachere Aussagen als für $\sigma_{(1,\dots,1)}$: Ist $n \neq 2$, sind die isotypischen Komponenten von τ^n die reellen Koordinatenachsen und treten mit Vielfachheit 1 auf, weshalb $\text{Aut}(\tau^n) := \text{Nor}_{O(\mathbb{R}^n)} Q^{n-1} = \mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ ist. τ^2 ist hingegen irreduzibel und es gilt $\text{Aut}(\tau^2) = O(2)$.

Das Scheibendiagramm von τ^n ist $\{ [\tau^k] \mid 0 \leq k \leq n \}$ und die Stratifizierung $\{ \mathbb{R}_J^n \mid J \subset I \}$ von \mathbb{R}^n als Ecke i. w. S. verfeinert die Scheibentypenstratifizierung der Q^{n-1} -Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n : Das Hauptstratum ist $\mathbb{R}_n^n \cup \mathbb{R}_{n-1}^n$, die tieferen Strata sind die \mathbb{R}_j^n mit $n-2 \geq j \geq 0$.

Eine genauere Betrachtung der primen Darstellungen $S^1 \rightarrow O(\mathbb{C})$ und $\mathbb{Z}_2 \rightarrow O(\mathbb{R})$ der reellen bzw. 2-primären Kodimension 0 ist müßig.

DEFINITION VON Δ^{ab}

Definiere Δ^{ab} als das von den primen, abelschen Scheibentypen der reellen oder 2-primären Kodimensionen 0 oder 1 erzeugte, unter Produktbildung abgeschlossene Scheibendiagramm. Repräsentanten dieser Scheibentypen wurden in 1.5 angegeben und soeben näher untersucht. Der Zweck dieses Scheibendiagramms klärt sich in Satz 5.11.

Ein Tubensystem von Δ^{ab}

Eine Ts-Auswahl φ war in 3.6 definiert worden als eine Familie bestehend aus einem Tubensystem φ^{E_\bullet} (im Sinne von 3.3) für jede Modellschar $E_\bullet \in \text{Ms}$ (siehe 2.10), so daß (TA1)–(TA3) galt. Für Tubensysteme von Scheibendiagrammen gilt hingegen die Definition I 4.12 mit der Abwandlung aus I 9.2.

5.4 **Lemma.** *Eine Ts-Auswahl φ bestimmt in natürlicher Weise ein Tubensystem χ des Scheibendiagramms Δ^{ab} .*

BEWEIS. Die äquivarianten Vektorräume $S^1 \rightarrow O(\mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_2 \rightarrow O(\mathbb{R})$, $\sigma_{(1,1)}$ und τ^2 haben Länge 2 und besitzen daher je genau ein Tubensystem.

Für $a \in (\mathbb{N} \setminus 0)^n$, $a \neq (1,1)$, bestimmt $\varphi^{\mathbb{C}^n}$ durch Weglassen einiger Strata und Zusammenfassen einiger anderer Strata eine Familie $\chi^{\sigma_a} = (\chi_t^{\sigma_a})_{t \geq \sigma_a}$ von Tuben der St-Strata des äquivarianten Vektorraums σ_a , denn laut 5.2 verfeinert die Stratifizierung von \mathbb{C}^n die St-Stratifizierung von σ_a . Da $\varphi^{\mathbb{C}^n}$ $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ -äquivariant ist und nach Lemma 5.1 $\text{Aut}(\sigma_a) \subset O(\mathbb{C}^n) \rtimes \mathfrak{S}_n = \text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ gilt, ist χ^{σ_a} $\text{Aut}(\sigma_a)$ -äquivariant. Ist τ ein zu σ_a isomorpher äquivarianter Vektorraum, so sei χ^τ die Übertragung von χ^{σ_a} auf τ mittels irgendeines Isomorphismus. Wegen der $\text{Aut}(\sigma_a)$ -Äquivarianz von χ^{σ_a} ist χ^τ wohldefiniert.

Analog läßt sich ausgehend von $\varphi^{\mathbb{R}^n}$ auf jedem zu einem τ^n , $n \neq 2$, isomorphen äquivarianten Vektorraum τ ein Tubensystem χ^τ definieren.

Ist schließlich τ ein Produkt von bereits mit Familien von Tuben versehenen äquivarianten Vektorräumen, so definiere χ^τ als das Produkt dieser Familien (siehe I 9.2). Setze nun wie üblich $\chi^t := (\chi^\tau)_{\tau \in t}$ für $t \in \Delta^{\text{ab}}$ und $\chi := (\chi^t)_{t \in \Delta^{\text{ab}}}$.

Daß χ ein Tubensystem ist, folgt aus den Eigenschaften (T1)–(T4) und dem Normalenabstieg (TA3) von φ . \square

Der entscheidende Punkt des Beweises ist, daß der aufwendig, aber elementar zu formulierende Normalenabstieg der Ts-Auswahlen aus Definition 3.6 bereits der Kern der verwickelten Definition der Tubensysteme aus I 4.9 ist.

Beachte, daß nur die Tubensysteme φ^{E_\bullet} der komplexen und reellen Modellräume E_\bullet , nicht der anderen Sorten von Modellobjekten Eingang in χ finden. Ebenso wurden die Eigenschaften (T5)–(T7) und (TA1) und (TA2) noch nicht benutzt.

Eine Linearisierung der Sd-Matrix (Δ^{ab} χ)

5.5

Bei der Linearisierung bietet sich folgender Zwischenschritt an: Sei $a \neq (1, 1)$. Identifiziere $T^n/G(a)$ mit S^1 via $[\lambda] \mapsto \omega_a(\lambda)$, \mathbb{Z}_2 mit $\{\text{id}, (\bar{})\}$ und $S^1 \times \mathbb{Z}_2$ mit $O(\mathbb{C})$ via $(\lambda, c) \mapsto (z \mapsto \lambda c(z))$. Der Quotient $\text{Aut}(\sigma_a)/G(a) = (S^1 \times \mathbb{Z}_2) \times \prod_k \mathfrak{S}_{n_k}$ der Automorphismengruppe operiert effektiv auf $G(a) \backslash \mathbb{C}^n$. Auf

$$X_a := \{ (w, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid |w| = \omega_a(v) \}$$

operiert $O(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_n$, dabei operiert \mathfrak{S}_n durch Permutation der Koordinatenachsen von $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} G(a) \backslash \mathbb{C}^n &\longrightarrow X_a \\ [z] &\longmapsto (\omega_a(z), |z|) \end{aligned} \tag{b}$$

ein $O(\mathbb{C}) \times \prod_k \mathfrak{S}_{n_k}$ -äquivarianter Homöomorphismus.

Eine Glättungsfolge g (siehe Definition 4.3) stellt u. a. einen \mathfrak{S}_n -äquivarianten Homöomorphismus zwischen der kubischen Ecke $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ und dem Halbraum $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i \geq 0 \}$ zur Verfügung, nämlich die Einschränkung von ${}^1g^n: {}^1E^n \rightarrow {}^0E^n$ auf die stratifizierten Teilmengen von ${}^1E_\bullet^n$ und ${}^1H_\bullet^n = {}^0E_\bullet^n$. Der Halbraum ${}^0E_\bullet^n$ ist seinerseits eingebettet in den komplexifizierten Halbraum C_\bullet^n (siehe 2.7); dessen Automorphismengruppe war $O(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}^n$.

Definiere nun f_a als das Kompositum von (b) und

5.6

$$\begin{aligned} X_a &\longrightarrow C_\bullet^n \\ (w, v) &\longmapsto \frac{w}{|w|} \cdot h^n(v) \end{aligned} \tag{\#}$$

Da S^1 auf den niederen Strata von C_\bullet^n trivial operiert, darf $\frac{w}{|w|}$ dort undefiniert sein.

Einprägsam formuliert lautet die Abbildungsvorschrift

$$f_a([z]) = \omega_a\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot {}^1g^n(|z|),$$

wobei $|z|$ für $(|z_1|, \dots, |z_n|)$ und $\frac{z}{|z|}$ für $(\frac{z_1}{|z_1|}, \dots, \frac{z_n}{|z_n|})$ steht. f_a ist ein Homöomorphismus: Die Umkehrabbildung ergibt sich samt Stetigkeit als die kommutative Ergänzung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^n & \longleftarrow & S^1 \times \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i v_i = 0\} & & (\lambda, x) & \longmapsto & (\lambda, {}^1g^n(x)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C^n & & \lambda \cdot [x] & \longleftarrow & \lambda \cdot {}^1g^n(x). \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G(a) \backslash \mathbb{C}^n & \longleftarrow & & & & & \end{array}$$

Da C^n insbesondere ein euklidischer Vektorraum ist, definiert der Homöomorphismus f_a eine euklidische Struktur \mathcal{V}^{σ_a} auf dem Quotienten $G(a) \backslash \mathbb{C}^n$. Aus Äquivarianzgründen ist dann auf dem Quotienten eines jeden zu σ_a isomorphen äquivarianten Vektorraum τ eine euklidische Struktur \mathcal{V}^τ wohldefiniert.

Definiere analog für $n \neq 2$ den Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} f'_n : Q^{n-1} \backslash \mathbb{R}^n & \longrightarrow & R^n, \\ [z] & \longmapsto & \omega'\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot {}^1g^n(|z|) \end{array}$$

wobei $\omega' : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ durch $\lambda \mapsto \prod_i \lambda_i$ definiert sei, dadurch die euklidische Struktur \mathcal{V}^{τ^n} auf $Q^{n-1} \backslash \mathbb{R}^n$ und die euklidische Struktur \mathcal{V}^τ auf dem Quotienten eines jeden zu τ^n isomorphen äquivarianten Vektorraums τ .

Die äquivarianten Vektorräume $S^1 \rightarrow O(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_2 \rightarrow O(\mathbb{R}), \sigma_{(1,1)}$ und τ^2 haben Länge 2 und besitzen daher laut Proposition I 5.10 je genau eine Quotientenstruktur.

Für jeden primen äquivarianten Vektorraum τ mit in Δ^{ab} enthaltenem Scheibendiagramm ist damit eine euklidische Struktur \mathcal{V}^τ auf dessen Quotienten erklärt. Definiere die euklidische Struktur auf dem Quotienten eines Produktes als das Produkt der euklidischen Strukturen der Quotienten. Setze schließlich $\mathcal{V}^t := (\mathcal{V}^\tau)_{\tau \in t}$ für $t \in \Delta^{ab}$ und $\mathcal{V} := (\mathcal{V}^t)_{t \in \Delta^{ab}}$.

5.7 Lemma.

(1) Die Abbildungen $\mathbb{C}^{n-j} \xleftarrow{\widehat{\pi|..}} NC_J^n \xrightarrow{\varphi_J^{\mathbb{C}^n}} \mathbb{C}^n$ aus Definition 3.6 (TA3) induzieren Abbildungen

$$G(a_{I \setminus J}) \backslash \mathbb{C}^{n-j} \xleftarrow{\widehat{\pi|..}} G(a) \backslash NC_J^n \xrightarrow{\varphi_J^{\mathbb{C}^n}} G(a) \backslash \mathbb{C}^n$$

auf Quotientenniveau, wobei $a_{I \setminus J} = (a_i)_{i \in I \setminus J}$.

(2) Normalenabstieg für die Familie $f := (f_a)_{a \in (\mathbb{N} \setminus 0)^n, n \in \mathbb{N} \setminus 0}$: Für $\emptyset \neq J \subsetneq I$, $j := \#J$, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 G(a_{I \setminus J}) \setminus \mathbb{C}^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\pi|..}} & G(a) \setminus NC_J^n & \xrightarrow{\overline{\varphi_J^{C^n}}} & G(a) \setminus \mathbb{C}^n \\
 \lambda^{n-j} \cdot f_{a_{I \setminus J}} \downarrow & & *(\lambda^{n-j} \cdot f_{a_{I \setminus J}}) \downarrow & & \downarrow f_a \\
 \mathbb{C}^{n-j} & \xleftarrow{\widehat{\pi|..}} & NC_J^n & \xrightarrow{\varphi_J^{C^n}} & \mathbb{C}^n \\
 & & \downarrow & & \\
 \{\text{pt}\} & \xleftarrow{\quad} & G(a) \setminus \mathbb{C}_J^n & \xrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\} \\
 \downarrow & & f_a|.. \downarrow & & \downarrow \\
 \{\text{pt}\} & \xleftarrow{\quad} & NC_J^n & \xrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\}
 \end{array}$$

nahe dem Quotienten des Nullschnitts, wobei $*(\lambda^{n-j} \cdot f_{a_{I \setminus J}})$ als Rückzug von $\lambda^{n-j} \cdot f_{a_{I \setminus J}}$ mit Hilfe der linken Hälfte des Diagramms erklärt ist.

BEWEIS. Zu (1): $\tau_{a_{I \setminus J}}$ war bereits in 5.2 als die Scheibendarstellung von τ_a in den Punkten des J -Stratums erkannt worden. Beachte ferner $NC_J^n \cong \mathbb{C}^j \times \mathbb{C}^{n-j}$ und $G(a) \setminus \mathbb{C}_J^n \cong T^j \setminus \mathbb{C}_J^j \cong \mathbb{R}_{>0}^j$.

Zu (2): Die fraglichen Abbildungen sind äquivariant bezüglich der kanonischen Homomorphismen zwischen den jeweiligen Automorphismengruppen. Es genügt daher, $[\frac{\partial}{\partial y}|_x] \in G(a) \setminus NC_J^n$ mit $x \in \mathbb{R}_{>0}^j$ und $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-j}$ zu betrachten. Für diese Elemente kommutiert das Diagramm aber wegen des Normalenabstiegs der Glättungsfolge. \square

Proposition. Das Scheibendiagramm Δ^{ab} ist linearisierbar; genauer: Sei φ eine Ts-Auswahl, χ das gemäß Lemma 5.4 durch φ bestimmte Tubensystem von Δ^{ab} , g eine Glättungsfolge zu φ und \mathcal{V} die soeben definierte durch g bestimmte Familie. Dann ist \mathcal{V} eine Quotientenstruktur der Sd-Matrix $(\Delta^{ab} \quad \chi)$. 5.8

BEWEIS. Die allenthalben benötigten Eigenschaften der Ts-Auswahl φ und der Glättungsfolge g benutze ich ohne Verweis.

Wegen Lemma I 9.5 genügt es, für die f_a induktiv die Eigenschaften (L1') bis (L5') aus I 5.6 nachzuweisen — der Nachweis für die f'_n verläuft analog.

Zu (L1'): Daß f_a ein Homöomorphismus ist, wurde bereits in 5.6 gezeigt.

Zu (L2'): $\|\omega_a(\frac{z}{|z|})^1 g^n(|z|)\| = \|{}^1 g^n(|z|)\| = \|z\|$

Zu (L3'): $\omega_a(\frac{tz}{|tz|}) \cdot {}^1 g^n(|tz|) = \omega_a(\frac{z}{|z|}) \cdot t^1 g^n(|z|)$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zu (L4'): Für $a \neq (1, 1)$ genügt die in (G4) aus 4.1 bemerkte Äquivarianz, während

$f_{(1,1)}: S^1 \setminus \mathbb{C}^2 \rightarrow C^2$ gleich der in Proposition I 5.10 (2) gegebenen Linearisierung ist, denn

$$\begin{aligned} f_{(1,1)}([z]) &= \omega_{(1,1)}\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot {}^1g^2(|z|) \\ &= \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} \cdot \frac{1}{\|z\|} \left(2|z_1 z_2| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-|z_1|^2 + |z_2|^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{2z_1 z_2}{\|z\|}, \frac{-|z_1|^2 + |z_2|^2}{\|z\|} \right) = \frac{(z_2 + z_1 j) \overline{i(z_2 + z_1 j)}}{|z_2 + z_1 j|}, \end{aligned}$$

wobei $C^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{C}\bar{k} + \mathbb{R}i = \text{Im } \mathbb{H}$ identifiziert wurde. Beachte dabei, daß der für ${}^1g^2(|z|)$ eingesetzte Ausdruck die durch (GF4) aus Definition 4.3 gewährleistete Verdopplung des Winkels bedeutet.

Zu (L5'): Betrachte $\sigma_a: G(a) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Die durch \mathcal{V}^{σ_a} auf $G(a) \setminus \mathbb{C}^n \setminus 0$ induzierte differenzierbare Struktur heie \mathcal{D} . Andererseits liefert das Einschränken von σ_a auf $\mathbb{C}^n \setminus 0$ die Mf-Matrix $\begin{pmatrix} \sigma_a|_{\mathbb{C}^n \setminus 0} & \chi^{\sigma_a} & \\ \text{St}_{>\sigma_a} & \chi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$, nach Satz I 7.7 daher eine differenzierbare Struktur \mathcal{D}' auf $G(a) \setminus \mathbb{C}^n \setminus 0$. Zu zeigen ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Ich zeige die Gleichheit nahe jedem Stratum $G(a) \setminus \mathbb{C}^n_J, \emptyset \neq J \subset I$: Da alle Quotientenstrukturen mittels der Familie f von Linearisierungskarten definiert wurden, folgt die Gleichheit von \mathcal{D} und \mathcal{D}' nahe dem J -Stratum aus dem Normalenabstieg 5.7 (2) von f über das J -Stratum. Dies gilt auch für die zum Hauptstratum gehörenden J -Strata (siehe 5.2), da in diesen Fällen alle beteiligten differenzierbaren Strukturen kanonisch sind.

Aus der Existenz 3.9 einer Ts-Auswahl φ , der Konstruktion des Tubensystems χ von Δ^{ab} , der Existenz 4.4 einer Glättungsfolge g zu φ und der Konstruktion der Linearisierung \mathcal{V} von $(\Delta^{ab} \ \chi)$ folgt die Linearisierbarkeit von Δ^{ab} . \square

5.9 BEZIEHUNG ZWISCHEN τ^n UND $\sigma_{(1,\dots,1)}$

$(\Delta^{ab} \ \chi \ \mathcal{V})$ bezeichne die Sd-Matrix aus Proposition 5.8. Setze $a := (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$. Die Darstellung τ^n ist in σ_a enthalten:

$$\begin{array}{ccc} Q^{n-1} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tau^n} & \mathbb{R}^n \\ \cap & & \cap \\ G(a) \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sigma_a} & \mathbb{C}^n, \\ (\lambda \quad , \quad z) & \longmapsto & (\lambda_i z_i)_i \end{array}$$

und $\text{Aut}(\tau^n)$ läßt sich als Untergruppe von $\text{Aut}(\sigma_a)$ auffassen. Das Tubensystem χ^{τ^n} ist wegen der Eigenschaft (TA1) aus Definition 3.6 die Einschränkung des Tubensystems χ^{σ_a} auf \mathbb{R}^n . Die Linearisierungskarte f'_n ist die Einschränkung der Linearisie-

rungskarte f_a auf R^n :

$$\begin{array}{ccc}
 Q^{n-1} \setminus \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f'_n} & R^n \\
 \cap & & \cap \\
 G(a) \setminus \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_a} & C^n \\
 [z] & \longmapsto & \omega_a\left(\frac{z}{|z|}\right) \cdot {}^1g^n(|z|)
 \end{array}$$

Die Inklusion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ induziert daher auf Quotientenniveau die äquivariante, metrische und lineare Einbettung einer Hyperebene: $(G(a) \setminus \mathbb{C}^n, \mathcal{V}^{\tau^n}) \longrightarrow (G(a) \setminus \mathbb{C}^n, \mathcal{V}^{\sigma_a})$.

PRODUKTEIGENSCHAFT VERSUS HALBRAUMEIGENSCHAFT

5.10

Tubensysteme von Scheibendiagrammen und Quotientenstrukturen von Scheibendiagrammen mit Tubensystemen sind in diesem Paragraphen bisher im Sinne von I 9.2, d. h. mit der Produkteigenschaft, verwendet worden.

Sei nun φ eine Ts-Auswahl, g eine Glättungsfolge,

$$(\Delta^{ab} \quad \chi \quad \mathcal{V}) \tag{*}$$

die zu φ und g gemäß Proposition 5.8 konstruierte Sd-Matrix und $(M_1 \quad \psi^1 \quad \mathcal{D}^1), \dots, (M_k \quad \psi^k \quad \mathcal{D}^k)$ über (*) liegende Mf-Matrizen. Dann ist auch

$$(M_1 \times \dots \times M_k \quad \psi^1 \times \dots \times \psi^k \quad \mathcal{D}^1 \times \dots \times \mathcal{D}^k)$$

eine über (*) liegende Mf-Matrix. Nenne diese Eigenschaft die Produkteigenschaft von (*).

Hat für mehrere i der Orbitraum $G_i \setminus M_i$ nichtleeren Rand, so so ist der Rand von $G_1 \times \dots \times G_k \setminus M_1 \times \dots \times M_k$ nicht glatt. Verantwortlich für die Ränder sind allein die durch $T^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ und durch $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ repräsentierten Scheibentypen. Komponiert man deren Linearisierungskarten $T^n \setminus \mathbb{C}^n \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ bzw. $\mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbb{R}^n \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit den „Glättungen“ $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \xrightarrow{{}^1g^n} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i \geq 0\}$, so erhält man eine Quotientenstruktur \mathcal{W} der Sd-Matrix $(\Delta^{ab} \quad \chi)$ nach einer zwischen I 5.4 und I 9.3 liegenden Definition.

Ist $(M \quad \psi \quad \mathcal{D})$ eine über $(\Delta^{ab} \quad \chi \quad \mathcal{W})$ liegende Mf-Matrix, so ist der Rand des Orbitraums $G \setminus M$, versehen mit der differenzierbaren Struktur \mathcal{D} möglicherweise leer, in jedem Falle aber glatt. Dies heie die Halbraumeigenschaft von $(\Delta^{ab} \quad \chi \quad \mathcal{W})$.

Man kann und muß sich also beim Linearisieren von Δ^{ab} zwischen Produkteigenschaft und Halbraumeigenschaft entscheiden. Nachträglich ist es übrigens immer mglich, einen Rand mit kubischen Ecken einer Mannigfaltigkeit zu glätten, siehe [Douady/Hérault].

DAS HAUPTRESULTAT

Ein äquivarianter Vektorraum $K < O(V)$ heie abelsch, wenn K abelsch ist. Ein Scheibentyp heie abelsch, wenn er die Isomorphieklasse eines abelschen äquivarianten Vektorraums ist. Ein Scheibendiagramm heie abelsch, wenn jeder in ihm enthaltene Scheibentyp abelsch ist. Das Scheibendiagramm einer äquivarianten Mannigfaltigkeit $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ ist genau dann abelsch, wenn in jedem Punkt $x \in M$ die Standgruppe H_x , geteilt durch den Kern der Scheibendarstellung in x , eine abelsche Gruppe ist. Ist die Teilungsgruppe H abelsch, so erst recht das Scheibendiagramm.

5.11 Satz. *Für eine äquivariante Mannigfaltigkeit $H \triangleleft G \rightarrow \text{Diffeo}(M)$ mit abelschem Scheibendiagramm sind äquivalent:*

- (1) $H \setminus M$ ist eine evtl. berandete, topologische Mannigfaltigkeit.
- (2) Jeder Primfaktor der groben Scheibendarstellungen hat die Kodimension 0 oder 1.
- (3) Jeder Primfaktor der groben Scheibendarstellungen ist äquivalent zu
 - $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow O(\mathbb{R})$,
 - $S^1 \hookrightarrow O(\mathbb{C})$,
 - $Q^{n-1} \hookrightarrow O(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2$ oder
 - $G(a) \hookrightarrow O(\mathbb{C}^n)$ mit $n \geq 1$, $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, $a \neq (1)$, $a \neq (2)$
- (4) $\Delta(M)$ ist eine Teilmenge von Δ^{ab} .
- (5) $\Delta(M)$ ist linearisierbar, und zwar wahlweise mit Produkteigenschaft oder mit Halbraumeigenschaft (siehe 5.10).
- (6) $H \setminus M$ besitzt eine Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit — möglicherweise leerem — glatten Rand.

Hat M diese Eigenschaften, so sind äquivalent:

- (1') Der Rand von $H \setminus M$ ist leer.
- (2') Jeder Primfaktor hat Kodimension 1.
- (3') Jeder Primfaktor ist äquivalent zu
 - $Q^{n-1} \hookrightarrow O(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2$ oder
 - $G(a) \hookrightarrow O(\mathbb{C}^n)$ mit $n \geq 1$, $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, $a \neq (1)$, $a \neq (2)$.

BEWEIS. (1) \Leftrightarrow (2): Sei $x \in M$. Die Scheibendarstellung $H_x \rightarrow \text{GL}(T_x(Hx))$ und die grobe Scheibendarstellung $H_x \rightarrow \text{GL}(T_x X)$, X das x enthaltende Scheibentypenstratum, unterscheiden sich nur um triviale Summanden, ihre Primfaktoren sind also gleich. Nach Lemma I 7.17 und Bemerkung 1.4 (i) gelten dann aber die Äquivalenzen (1) \Leftrightarrow Jedes $[\sigma] \in \Delta_{\text{Jänich}}$ hat QM \Leftrightarrow (2).

(2) \Leftrightarrow (3) nach 1.6 und 1.7.

(3) \Rightarrow (4) nach Definition von Δ^{ab} .

(4) \Rightarrow (5): Δ^{ab} besitzt nach Proposition 5.8 eine Linearisierung mit Produkteigenschaft, die sich gemäß 5.10 in eine Linearisierung mit Halbraumeigenschaft verwandeln läßt.

(5) \Rightarrow (6) nach Definition der Halbraumeigenschaft in 5.10.

(6) \Rightarrow (1) ist trivial.

(1') \Leftrightarrow (2') folgt aus Satz 1.9, (2') \Leftrightarrow (3') aus Lemma 1.7. \square

BEMERKUNG. Die in (3) genannten Darstellungen bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der primen abelschen Scheibentypen der Kodimensionen 0 und 1.

Als Folgerung ergibt sich aus obigem Satz:

Korollar. *Der Quotient einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit nach der Operation einer kompakten, abelschen Liegruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit genau dann, wenn er eine topologische Mannigfaltigkeit ist.* **5.12**

KAPITEL III

DIE DIFFEOMORPHIE VON $\mathbb{C}P^2/(\sim)$ ZU S^4

KONVENTION. Für einen K -Vektorraum V notiere ich die Operation von K^\times von links, die von $GL(V)$ von rechts, die Vektoren nach einer Basiswahl deshalb als Zeilenvektoren. Dies ist bei der Wahl der die Quaternionen involvierenden Isomorphismen 3.7 vorteilhaft; der Grund ist letztlich die Beziehung $i \cdot j = k$.

§1 Die komplex projektive Ebene

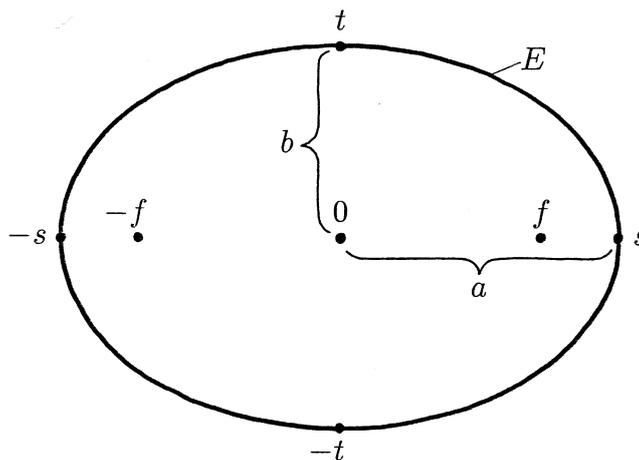
Die geometrischen Besonderheiten einer komplex projektiven Ebene, die als Projektifizierung der Komplexifizierung eines orientierten, euklidischen Vektorraums entsteht, werden eingehend untersucht, u. a. durch Angabe eines anschaulichen Modells.

Das Ellipsenmodell

Sei V ein dreidimensionaler, orientierter euklidischer Vektorraum. Eine Ellipse E in V ist das affine Bild eines Kreises, soll heißen $\exists A \in L(\mathbb{R}^2, V), m \in V: E = S^1 \cdot A + m$. Sie soll Ursprungsellipse heißen, falls $m = 0$; andere werden nicht vorkommen, ebensowenig $E = \{0\}$. Bezeichnet (e_1, e_2) die Standardbasis des \mathbb{R}^2 , so ist

$$E = \{ \cos \varphi e_1 A + \sin \varphi e_2 A \mid \varphi \in \mathbb{R} \}.$$

Bei geeigneter Wahl von A ist $s := e_1 A \perp e_2 A =: t$ und $a := \|s\| \geq \|t\| =: b$. Falls $a > b$, so sind die Richtungen $\mathbb{R}s$ und $\mathbb{R}t$ eindeutig bestimmt, falls $a = b$, so ist $s \perp t$ automatisch erfüllt. s und $-s$ heißen die Hauptscheitel, t und $-t$ die Nebenscheitel, a heißt die Länge der großen Halbachsen, b die Länge der kleinen. $f := cs$, wobei $c := \sqrt{a^2 - b^2}$, und $-f$ heißen die Brennpunkte, ihre relative Länge $\varepsilon := \frac{c}{a} \in [0, 1]$ die Exzentrizität von E . Es ist $\varepsilon = 0$ genau dann, wenn E ein Kreis ist, und $\varepsilon = 1$ genau dann, wenn E eine Strecke ist.



Zeichnung 12: Ellipse

Ursprungsellipsen E und E' heißen ähnlich, wenn sie durch Homothetien von V ineinander übergehen. Bei den verschiedenen Normierungen, d.h. Repräsentantenwahlen aus Ähnlichkeitsklassen, wird lediglich auf die Anwendbarkeit der Normierungsbedingung auch bei $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ zu achten sein.

Die Normalenvektoren $e_1 A \times e_2 A$ und $e_2 A \times e_1 A$ liegen durch E bereits fest: Ihre Länge ist ab , ihre Richtung senkrecht zum linearen Erzeugnis $\mathbb{R}E$. Ein Paar (E, n) aus einer Ellipse und einem ihrer Normalenvektoren soll orientierte Ellipse heißen. Statt (E, n) schreibe ich meist wieder E . Ist $\varepsilon < 1$, so hat E genau zwei Orientierungen, im Falle $\varepsilon = 1$ wegen $n = 0$ nur eine. Für $\varepsilon < 1$ ist eine Orientierung von E gleichwertig zu einer Orientierung der Ebene $\mathbb{R}E$ wie auch zu einem Durchlaufsinne von E .

Definiere nun das Ellipsenmodell \mathfrak{E} als die Menge der durch $a^2 + b^2 = 1$ normierten, orientierten Ursprungsellipsen in V . $O(V)$ operiert auf \mathfrak{E} durch

$$((E, n), A) \longmapsto (EA, nA).$$

Sei z aus der Einheitssphäre von $V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Das Bild der $U(1)$ -Bahn von z unter $V_{\mathbb{C}} \rightarrow V, x + iy \mapsto x + y$, ist $E(z) := \{ \cos \varphi \operatorname{Re} z + \sin \varphi \operatorname{Im} z \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$.

Proposition. *Ist V ein dreidimensionaler, orientierter euklidischer Vektorraum, so ist $P(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathfrak{E}, z \mapsto (E(z), \operatorname{Re} z \times \operatorname{Im} z)$, eine äquivariante Bijektion zwischen der Projektifizierung der Komplexifizierung von V und der Menge der durch $a^2 + b^2 = 1$ normierten, orientierten Ursprungsellipsen in V .* 1.1

Bezeichne auch die $z \in P(V_{\mathbb{C}})$ zugeordnete orientierte Ellipse $(E(z), \operatorname{Re} z \times \operatorname{Im} z)$ mit $E(z)$.

Riemannsche Metrik

Sei W ein dreidimensionaler, unitärer Vektorraum. Schreibe $z \perp w$ für $\langle z, w \rangle = 0$ und $z \perp_{\mathbb{R}} w$ für $\operatorname{Re} \langle z, w \rangle = 0$, wobei $z, w \in W$. Auf $P(W)$ wähle ich die Fubini- 1.2

Study-Metrik: $d(\mathbb{C}z, \mathbb{C}w) = \arccos \frac{|(z,w)|}{\|z\|\|w\|}$, wobei $z, w \in W \setminus 0$. Sie ist bis auf Normierung durch ihre $SU(W)$ -Äquivarianz charakterisiert, da $SU(W)$ auf $P(W)$ transitiv operiert und die Isotropiedarstellungen, da zur Standarddarstellung von $U(2)$ äquivalent, irreduzibel sind. Kern dieser Operation ist das Zentrum \mathbb{Z}_3 von $SU(W)$; setze $PU(W) := U(1) \backslash U(W) \cong \mathbb{Z}_3 \backslash SU(W)$. Sei ferner \mathcal{V} die Menge der reellen Unterräume V von W , so daß $W = V_{\mathbb{C}}$ gilt, und zwar metrisch.

1.3 Lemma. $1 \rightarrow PU(W) \rightarrow \text{Isom}(P(W)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$ ist eine hinten spaltende, exakte Sequenz. Die Zuordnungen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Menge der Spalte} & \longleftarrow & \text{Isom}(P(W)) \setminus \text{Isom}_0(P(W)) & \longleftarrow & & & \mathcal{V} \\
 s & \longleftarrow & s(-1) & & & & \\
 & & g & \longrightarrow & \{z \in W \mid g(z) = z\} & & \\
 & & \text{kpl. Konj. bzgl. } V & \longleftarrow & & & V
 \end{array}$$

sind bijektiv. Nach Wahl eines $V \in \mathcal{V}$ ist daher $\text{Isom}(P(W)) = PU(W) \times (\bar{})$.

BEWEIS. $I := \text{Isom}(P(W))$ ist eine kompakte Liegruppe (siehe z.B. [Besse], S. 40), gleichzeitig eine maximale endliche Erweiterung von I_0 .

$I_0 = PU(W)$: Es ist $(PU(W), P(U(1) \times U(2)))$ ist ein riemannsch symmetrisches Paar, $PU(W)$ ist halbeinfach und operiert auf $P(W)$ effektiv, die riemannsche Metrik auf $P(W)$ ist $PU(W)$ -invariant. Nach [Helgason], Ch. V Theorem 4.1, S.243, ist dann $I_0 = PU(W)$.

$I/I_0 = \mathbb{Z}_2$: Seien $H < G$ Liegruppen. $\text{Aut}(G, H) := \{\varphi \in \text{Aut}(G) \mid \varphi(H) = H\}$ heie die Gruppe der Automorphismen von G relativ H , der Normalteiler $\text{Inn}(G, H) := \{h \cdot \dots \cdot h^{-1} \in \text{Aut}(G, H) \mid h \in H\}$ heie die Gruppe der inneren relativen Automorphismen, und der Quotient $\text{Out}(G, H) := \text{Aut}(G, H) / \text{Inn}(G, H)$ heie mißbräuchlich die Gruppe der äußeren relativen Automorphismen.

$P(W)$ ist zusammenhängend, kompakt und riemannsch homogen und

$$\text{Out}(PU(W), P(U(1) \times U(2))) = \mathbb{Z}_2$$

ist endlich. Nach [Klaus], S. 49, existiert deshalb in $\text{Diffo}(P(W))$ genau eine maximale endliche Erweiterung I von I_0 und $I/I_0 \cong \text{Out}(I_0, \text{Standgruppe eines Punktes})$. \square

1.4 Wähle auf $S^5 \subset W$ die Standardmetrik. Dann operiert $U(1)$ isometrisch von links und $U(1) \longrightarrow S^5 \xrightarrow{\pi} P(W)$ ist eine riemannsche Submersion. Für $z \in S^5$ ergibt sich

$$T_z S^5 = z^{\perp_{\mathbb{R}}} \supset z^{\perp} = H_z S^5 \cong T_{\mathbb{C}z} P(W),$$

wobei H das Horizontalbndel dieser Submersion bezeichnet. Die Geodätischen von $P(W)$ sind genau die Bilder der horizontalen Geodätischen von S^5 (siehe z. B. [Eschen-

burg], S. 6–7), sie alle sind einfach geschlossen und von der Länge π . Die Isometrie-
gruppe von $P(W)$ operiert sogar auf dem Einheitstangentialbündel von $P(W)$ transitiv,
mithin auch auf den Geodätischen.

Die $O(V)$ -Operation

1.5

Sei nun wieder V ein dreidimensionaler, orientierter euklidischer Vektorraum. Im Hin-
blick auf §2 betrachte ich jetzt $P(V_{\mathbb{C}})$ als $O(V)$ -Mannigfaltigkeit, denn die Quotien-
tenabbildung $P(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow P(V_{\mathbb{C}})/(\bar{})$ ist $\text{Nor}_{\text{Isom}(P(V_{\mathbb{C}}))}(\bar{})$ -äquivariant und der Normali-
sator von $(\bar{})$ ist $\text{SO}(V) \times (\bar{}) \cong O(V)$.

Bei der Identifikation von $P(V_{\mathbb{C}})$ mit \mathfrak{E} geht die $O(V)$ -Operation auf $P(V_{\mathbb{C}})$ in
die obige, höchst anschauliche Operation auf \mathfrak{E} über. Insbesondere erfolgt die kom-
plexe Konjugation $(\bar{})$ durch $-\text{id}_V$, d.h. durch Orientierungswechsel der Ellipsen. Die
Menge der (unorientierten) normierten Ursprungsellipsen in V ist deshalb ein Modell
für $P(V_{\mathbb{C}})/(\bar{})$, welches in Korollar 2.5 Anwendung findet.

1.6

Zwei Ellipsen liegen offenbar genau dann im selben $O(V)$ -Orbit, wenn ihre Exzen-
trizität gleich ist. Als $O(V)$ -Invariante kann statt ε auch $\|\mathbf{n}\|$ oder der Abstand von
 $P(V)$ dienen.

Die Menge $\{\varepsilon = 0\} = P(V)$ der reellen Punkte ist die Fixpunktmenge von $(\bar{})$. Sie
entspricht den zu Strecken entarteten Ellipsen, auch aufzufassen als die Ursprungsge-
raden in V . Wir erhalten die übliche Interpretation des $P(V)$:

- projektiver Punkt $\hat{=}$ Ursprungsgerade,
- reell projektive Gerade $\hat{=}$ Ursprungsebene,
- reelle Polarität $\hat{=}$ Übergang zum orthogonalen Komplement.

Die Menge $\{\varepsilon = 1\} =: \mathcal{I}$ der orientierten Kreise will ich imaginäre Punkte des $P(V_{\mathbb{C}})$
nennen. Die Zuordnung der leicht gestreckten Normale $\mathcal{I} \rightarrow S_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(V)$, $(E, \mathbf{n}) \mapsto \sqrt{2}\mathbf{n}$,
erweist sich als Isometrie von \mathcal{I} zur Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in V . Dabei geht $(\bar{})$ in
die Antipodenabbildung über.

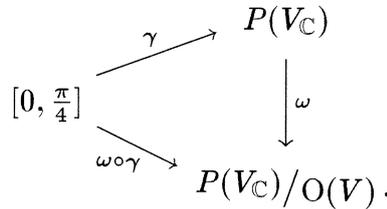
Die Standgruppe einer Ellipse (E, \mathbf{n}) mit von 0 und 1 verschiedener Exzentrizität
ist $\{\text{id}_V, \text{Spiegelung an } \mathbb{R}\mathbf{n}, \text{Spiegelung an } \mathbb{R}E, -\text{id}_V\} \cong_{\text{unkan.}} \mathbb{Z}_2^2$, ihr Orbit daher vom
Typ $O(V)/\mathbb{Z}_2^2 \cong \text{SO}(V)/\mathbb{Z}_2$.

Das Schiebendiagramm der $O(V)$ -Operation hat also die Länge 2, die durch die
riemannsche Metrik gegebenen Normaltuben von $P(V)$ und \mathcal{I} bilden zusammen mit
der trivialen Tube des Hauptstratums ein Tubensystem. Die groben Scheibendarstel-
lungen sind transitiv, mithin nach Proposition I 5.10 (1) eindeutig linearisierbar. Dies
bestimmt gemäß Satz I 7.7 eine differenzierbare Struktur auf $P(V_{\mathbb{C}})/O(V)$.

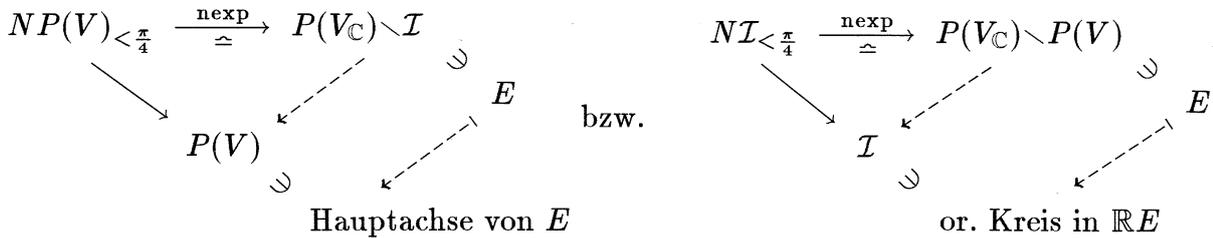
Da $O(V)$ isometrisch operiert, erhalten wir, indem wir den Abstand zweier Orbits,
aufgefaßt als Punkte von $P(V_{\mathbb{C}})/O(V)$, als ihren Abstand, aufgefaßt als Teilmengen

von $P(V_{\mathbb{C}})$, definieren, eine (riemannsche) Metrik auf dem Orbitraum.

1.7 $\gamma(t) = \mathbb{C} \cdot (\cos tb_1 + i \sin tb_2)$, (b_1, b_2) ein Orthonormalsystem in V , sind genau jene Geodätische von $P(V_{\mathbb{C}})$, die eine — und sogar jede — Faser der Quotientenabbildung $\omega: P(V_{\mathbb{C}}) \rightarrow P(V_{\mathbb{C}})/O(V)$ senkrecht schneiden. Wir können sie deshalb, obwohl ω nicht überall differenzierbar ist, als die horizontalen Geodätischen ansehen. Betrachte das Diagramm



$\omega \circ \gamma$ ist ein metrischer Diffeomorphismus und $\gamma \circ (\omega \circ \gamma)^{-1}$ ein globaler Schnitt. Wir „sehen“ jetzt die maximalen äquivarianten Tubenumgebungen von $P(V)$ und \mathcal{I} :



wobei in dem riemannschen Vektorbündel $NP(V) \rightarrow P(V)$ $NP(V)_{< \frac{\pi}{4}}$ die Menge der Vektoren, deren Norm kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist, und nexp die Normalenexponentialabbildung bezeichnet.

Wie in 1.2 bezeichne „ \perp “ (komplexe) Orthogonalität in $V_{\mathbb{C}}$ und „ $\perp_{\mathbb{R}}$ “ reelle Orthogonalität in $V_{\mathbb{C}}$; „ \perp in V “ bezeichne (reelle) Orthogonalität in V .

Komplex projektive Geraden $L \subset P(V_{\mathbb{C}})$, die über \mathbb{R} definiert sind, möchte ich spaltend nennen. Dies sind genau die Geraden $L = x^{\perp}$ mit $x \in P(V)$. $E(x^{\perp})$ sind die in der Ebene $E(x)^{\perp \text{ in } V}$ liegenden Ellipsen. In jedem spaltenden L spiegelt sich der eindimensionale Fall wider:

$$\begin{array}{ccccc}
 L \cap P(V) & \cong & \mathbb{R}P^1 & \cong & \mathbb{R} \cup \infty \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 L & \cong & \mathbb{C}P^1 & \cong & \mathbb{C} \cup \infty \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 L \cap \mathcal{I} & \cong & \text{im. Punkte} & \cong & \{i, -i\}
 \end{array}$$

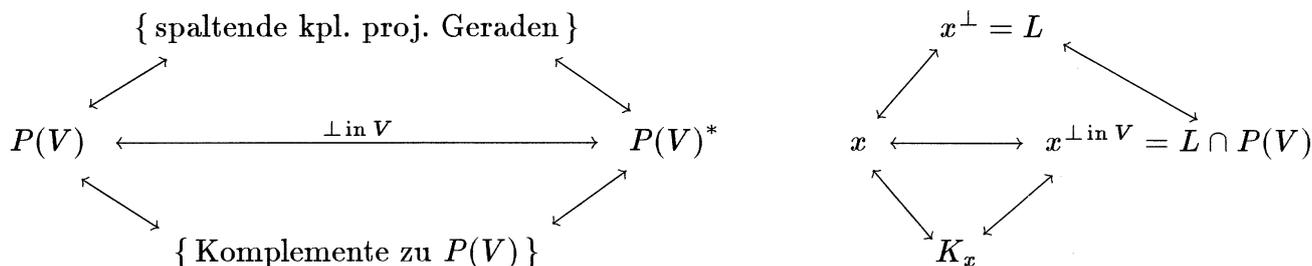
Die horizontalen Geodätischen durch einen festen reellen oder imaginären Punkt von $P(V_{\mathbb{C}})$ setzen sich zu Untermannigfaltigkeiten zusammen: Für die zu jedem $u \in \mathcal{I}$ eindeutig existierende spaltende Gerade L mit u und \bar{u} als imaginären Punkten gilt

$$L = \exp(N_u\mathcal{I}) = \exp(N_u\mathcal{I}_{<\frac{\pi}{4}}) \dot{\cup} (L \cap P(V)) \dot{\cup} \exp(N_{\bar{u}}\mathcal{I}_{<\frac{\pi}{4}}).$$

Betrachte analog dazu für $x \in P(V)$ $K_x := \exp(N_x P(V))$, das „Komplement zu $P(V)$ im Punkte x “. Sei (b_1, b_2, b_3) eine Orthonormalbasis von V mit $\mathbb{C}b_1 = x$. π bezeichne die riemannsche Submersion aus 1.4 und H deren Horizontalbündel. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \cong & (\pi|_H)^{-1} N_x P(V) & \xrightarrow{\exp} & S^5, \\ \rho e^{i\alpha} & \longmapsto & i\rho(\cos \alpha b_2 + \sin \alpha b_3) & \longmapsto & \cos \rho b_1 + i \sin \rho(\cos \alpha b_2 + \sin \alpha b_3) \end{array}$$

woran $K_x = \exp(N_x P(V)_{<\frac{\pi}{2}}) \dot{\cup} x^{\perp \text{ in } V} =$ (Menge der Ellipsen, die $\mathbb{R}E(x)$ als eine ihrer Achsen besitzen) $\cong P(\mathbb{R}b_1 \oplus i(b_1^{\perp \text{ in } V}))$ abzulesen ist. $P(\mathbb{R}b_1 \oplus i(b_1^{\perp \text{ in } V}))$ ist isomorph zu $P(V)$, was geometrisch durch $E \mapsto \mathbb{R} \cdot (s + t)$ realisiert wird, wobei s und t aufeinanderfolgend durchlaufene Haupt- und Nebenscheitel von E sind.



Vergleiche auch die Zeichnung 2.4 für die Lage der verschiedenen Untermannigfaltigkeiten zueinander.

Metrisch gesehen sind \mathcal{I} und x^{\perp} runde 2-Sphären vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{1}{2}$, $P(V)$ und K_x reell projektive Ebenen mit Fubini-Study-Metrik. $P(V)$, x^{\perp} und K_x liegen totalgeodätisch in $P(V_{\mathbb{C}})$, \mathcal{I} hingegen nicht.

§2 Die Diffeomorphie von $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$ zu S^4

Äquivariante Einbettungen graßmannscher Mannigfaltigkeiten

Ich beschränke mich auf \mathbb{C} als Skalarenkörper. Der reelle Fall läßt sich darin durch Übergang zu Teilmengen entdecken, die Suche nach Analogien über \mathbb{H} und \mathbb{O} bleibt dem Leser überlassen.

Sei X ein n -dimensionaler, unitärer Vektorraum und $G_k(X)$ die Graßmannmannigfaltigkeit der k -dimensionalen Unterräume. $U(X)$ operiert auf $G_k(X)$ transitiv mit zu $U(k) \times U(n - k)$ konjugierten Standgruppen; alle Abbildungen werden in geeignetem Sinne äquivariant sein. Das Skalarprodukt zeichnet den Isomorphismus $G_k(X) \rightarrow G_{n-k}(X)$, $u \mapsto u^{\perp}$, aus.

Der reelle Vektorraum $SA(X)$ der selbstadjungierten Endomorphismen sei mit der linearen $U(X)$ -Operation $(A, C) \mapsto C^{-1}AC$ von rechts und dem invarianten Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB)$ versehen.

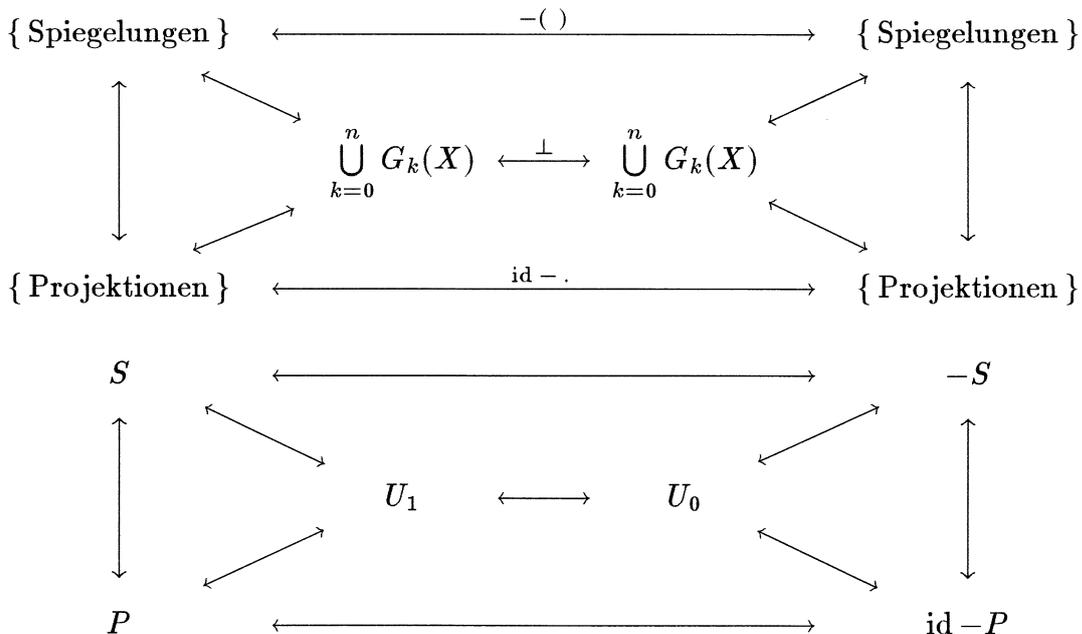
$S \in SA(X)$ heißt eine Spiegelung, wenn $S^2 = \text{id}$ ist. Genau dann existieren Unterräume U_+ und U_- mit $X = U_+ \oplus U_-$, so daß $S|_{U_+} = \text{id}$ und $S|_{U_-} = -\text{id}$ gilt. Die Unterräume U_{\pm} sind die ± 1 -Eigenräume von S . S heißt auch Spiegelung an U_+ . $-S$ ist die Spiegelung an U_- . Die Spur von S ist die Differenz $\dim U_+ - \dim U_-$. Die Menge der Spiegelungen ist gerade $U(X) \cap SA(X)$.

$P \in SA(X)$ heißt eine (orthogonale) Projektion, wenn $P^2 = P$ ist. Genau dann existieren Unterräume U_1 und U_0 mit $X = U_1 \oplus U_0$, so daß $P|_{U_1} = \text{id}$ und $P|_{U_0} = 0$ gilt. Die Unterräume $U_1 = \text{im } P$ und $U_0 = \text{ker } P$ sind die 1- bzw. 0-Eigenräume von P . P heißt auch Projektion auf U_1 . $\text{id} - P$ ist die Projektion auf U_0 . Es ist $\text{tr}(P) = \dim U_1$.

Spiegelungen, Projektionen und Unterräume von X lassen sich etwa durch

$$\begin{array}{ccc} U_+ & \longleftrightarrow & S = 2P - \text{id} \\ \parallel & & \updownarrow \\ U_1 & \longleftrightarrow & P = \frac{1}{2}(\text{id} + S) \end{array}$$

einander bijektiv zuordnen, woraus sich vier äquivalente Einbettungen von $G_k(X)$ in $SA(X)$ ergeben:



Eine Inklusion $X \subset Y$ unitärer Vektorräume führt einerseits zu Inklusionen der Grassmannschen $G_k(X) \subset G_k(Y)$, andererseits zu drei Einbettungen von $SA(X)$ in $SA(Y)$, indem man $A \in SA(X)$ durch id_{X^\perp} , 0_{X^\perp} oder $-\text{id}_{X^\perp}$ fortsetzt. Mit ihrer Hilfe läßt sich obiges Diagramm als funktoriell auffassen.

Die Veroneseabbildung

Betrachte nun speziell $X = \mathbb{C}^3$, $G_1(X) = \mathbb{C}P^2$ und die Einbettung

$$\begin{aligned} v: \mathbb{C}P^2 &\longrightarrow \text{SA}(\mathbb{C}^3). \\ U &\longmapsto \text{Proj. auf } U \end{aligned}$$

Repräsentanten projektiver Punkte seien stets aus S^5 gewählt. Die Abbildungsvorschrift lautet dann

$$v(\mathbb{C}z) = {}^*z \cdot z = \begin{pmatrix} \overline{z_1}z_1 & \overline{z_1}z_2 & \overline{z_1}z_3 \\ \overline{z_2}z_1 & \overline{z_2}z_2 & \overline{z_2}z_3 \\ \overline{z_3}z_1 & \overline{z_3}z_2 & \overline{z_3}z_3 \end{pmatrix}.$$

Die Quotientenabbildung von S^5 auf $\mathbb{C}P^2$, gefolgt von der Veroneseabbildung, quadriert das Skalarprodukt: $\langle v(x), v(y) \rangle = {}^*({}^*xx){}^*yy = {}^*x\langle x, y \rangle y = \langle x, y \rangle^2$, insbesondere ist $\|v(x)\| = \|x\|^2 = 1$. Wähle $\frac{1}{3} \text{id}$, dessen Norm $\frac{1}{\sqrt{3}}$ beträgt, als Nullpunkt des affinen Raumes $\{\text{tr} = 1\} \subset \text{SA}(\mathbb{C}^3)$. Damit ist

$$V := v(\mathbb{C}P^2) = \{P \in \text{SA}(\mathbb{C}^3) \mid P \text{ ist eine Projektion mit Spur } 1\}$$

eine vierdimensionale Untermannigfaltigkeit der siebendimensionalen Sphäre vom Radius $\sqrt{\frac{2}{3}}$ in $\{\text{tr} = 1\}$.

Wie spiegeln sich nun die in 1.5 genannten geometrischen Sachverhalte des $\mathbb{C}P^2$ in V bzw. in $\text{SA}(\mathbb{C}^3)$ wider?

Die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}P^2$ geht in die komplexe Konjugation der Matrizen über.

Für die Polarität gilt $v(x^\perp) = v(x)^\perp$ in $\text{SA}(\mathbb{C}^3) \cap V$; anders formuliert: Für Projektionen P und Q auf eindimensionale Unterräume ist ihre Orthogonalität in $\text{SA}(\mathbb{C}^3)$ äquivalent zur Orthogonalität von $\text{im } P$ zu $\text{im } Q$ in \mathbb{C}^3 .

Das Bild der reellen Punkte ist $v(\mathbb{R}P^2) = \text{SA}(\mathbb{R}^3) \cap V$.

Das Bild einer nicht notwendigerweise spaltenden komplex projektiven Geraden L ist $v(L^\perp)^\perp$ in $\text{SA}(\mathbb{C}^3) \cap V$, die 2-Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}(\text{id}_V - v(L^\perp))$ im den Mittelpunkt enthaltenden affinen Raum $\text{SA}(L) \cap \{\text{tr} = 1\}$. Interessanterweise ist $\text{id}_V - v(L^\perp)$ gerade die Projektion auf L , d. h. das Bild von L unter $G_2(\mathbb{C}^3) \hookrightarrow \text{SA}(\mathbb{C}^3)$. Zu einem expliziten Beweis darf ich wegen der $U(3)$ -Äquivarianz $L = e_1^\perp$ annehmen, dann ist

$$\begin{aligned} v(0: z_1: z_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |z_1|^2 & \overline{z_1}z_2 \\ 0 & \overline{z_2}z_1 & |z_2|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (|z_1|^2 - |z_2|^2) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{Re}(\overline{z_1}z_2) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 2 \text{Im}(\overline{z_1}z_2) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei tritt — wegen ihrer Einzigartigkeit bei geforderter Äquivarianz notwendigerweise — die in 3.8 behandelte Hopfabbildung $(z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) \\ 2 \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) \end{pmatrix}$ auf.

Betrachte zu einem konzeptionelleren Beweis das eindimensionale Analogon

$$\begin{array}{ccc} P(L) & \longrightarrow & \operatorname{SA}(L). \\ U & \longmapsto & \operatorname{Proj. auf } U \end{array}$$

Das Bild dieser Einbettung ist nicht nur enthalten in, sondern gleich der 2-Sphäre $\operatorname{SA}(L) \cap \{\operatorname{tr} = 1\} \cap \{\|\cdot\| = 1\}$. Mit Hilfe der Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{SA}(L) & \longrightarrow & \operatorname{SA}(\mathbb{C}^3) \\ A & \longmapsto & A \oplus 0_{L^\perp} \end{array}$$

folgt die Behauptung.

Analog ist das Bild einer reell projektiven Geraden $l = v(l^{\perp \text{ in } \mathbb{R}^3})^{\perp \text{ in } \operatorname{SA}(\mathbb{R}^3)} \cap V$, die 1-Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}(\operatorname{id}_V - v(l^{\perp \text{ in } \mathbb{R}^3}))$ in der den Mittelpunkt enthaltenden Ebene $\operatorname{SA}(l) \cap \{\operatorname{tr} = 1\}$. Die obige Rechnung spezialisiert sich für $l = e_1^{\perp \text{ in } \mathbb{R}^3}$ zu

$$v(0 : x_1 : x_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (x_1^2 - x_2^2) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 2x_1x_2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Systematisch gehe ich auf die Einbettung der Graßmannschen durch homogene Polynome nicht ein. Bemerkt sei allerdings, daß das naive Skalarprodukt auf dem Raum $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2$ der homogenen Polynome vom Grad 2 und der naive Isomorphismus $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_2 \cong \operatorname{SA}(\mathbb{R}^3)$ nicht zusammenpassen, weshalb die Bilder der reell projektiven Geraden von manchen Autoren nur als Ellipsen bezeichnet werden.

Die Einbettung von $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$

Die Realteilbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{SA}(\mathbb{C}^3) & \longrightarrow & \operatorname{SA}(\mathbb{R}^3) \\ A & \longmapsto & \operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}) \end{array}$$

ist die Mittelung über die $(\bar{\quad})$ -Operation und daher statt $U(3)$ - nur noch $O(3)$ -äquivariant. Zum Verständnis von

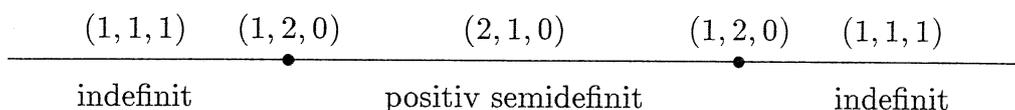
$$\begin{array}{ccc} w : \mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad}) & \longrightarrow & \operatorname{SA}(\mathbb{R}^3) \\ \{z, \bar{z}\} & \longmapsto & \operatorname{Re}(v(z)) = v(\operatorname{Re}(z)) + v(\operatorname{Im}(z)) \end{array} \quad (\clubsuit)$$

interpretiert Arnold in [Arnold II] $\operatorname{SA}(\mathbb{R}^3)$ mittels symmetrischer Bilinearformen und $\mathbb{C}P^2$ mit Hilfe von Dreiecken: Fasse $\operatorname{SA}(\mathbb{R}^3)$ als Menge der symmetrischen Bilinearformen auf \mathbb{R}^3 auf. Zu $A \in \operatorname{SA}(\mathbb{R}^3)$ gibt es $B \in \operatorname{GL}(3; \mathbb{R})$ mit ${}^tBAB = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & \\ & \varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$,

wobei $\varepsilon_i \in \{1, 0, -1\}$. Das Tripel (n_+, n_0, n_-) der Anzahlen der positiven bzw. verschwindenden bzw. negativen ε_i heißt die Signatur von A . Da jede degenerierte Form höchstens Rang 2 hat, liegt sie auf einer Geraden durch zwei Rang-1-Formen, d. h. die Menge der degenerierten Formen ist die Vereinigung der Sekanten an der Menge der Rang-1-Formen.

Die Grammatrix $(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}$ dreier Vektoren v_0, v_1, v_2 eines euklidischen Vektorraumes ist positiv semidefinit; ihr Rang ist gleich der Dimension des Erzeugnisses von $\{v_0, v_1, v_2\}$. Umgekehrt ist jede positiv semidefinite Form die Grammatrix geeigneter Vektoren.

Die positiv semidefiniten Formen sind die konvexe Hülle der Formen der Signatur $(1, 2, 0)$, die degenerierten positiv semidefiniten der Rand dieser Hülle. Zeichnung 13 zeigt das Verhalten der Signatur entlang einer Geraden durch zwei positiv semidefinite Rang-1-Formen, d. h. durch die Grammatrizen zweier Tripel kollinearer Vektoren.



Zeichnung 13: Signaturen entlang einer Geraden

Da die Multiplikation mit positiven Skalaren die Signatur erhält, böte sich, die Nullform vernachlässigend, der Übergang zur Einheitssphäre von $SA(\mathbb{R}^3)$ an. Da sich das Interesse auf die positiv semidefiniten, von 0 verschiedenen Formen beschränkt, folglich $\text{tr} > 0$ ist, erfolgt stattdessen der Übergang zur Hyperebene $\{\text{tr} = 1\}$.

Lemma. Die Menge W der positiv semidefiniten degenerierten Formen der Spur 1 ist homöomorph zu S^4 . 2.2

BEWEIS nach [Arnold II]. Sei X die Menge der positiv semidefiniten Spur-1-Formen. Da das Bild von X in $P(SA(\mathbb{R}^3))$ abgeschlossen ist und $\{\text{tr} = 0\}$ nicht schneidet, ist $\text{int}(X)$, die — bekanntlich konvexe — Menge der positiv definiten Spur-1-Formen, beschränkt. Wähle ein $x \in X$ und eine Sphäre Σ um x von beliebigem Radius. Jeder von x ausgehende Strahl trifft $W = \partial X$ und Σ je genau einmal, wodurch ein Homöomorphismus zwischen beiden gestiftet wird. Aus $\dim SA(\mathbb{R}^3) = 6$ folgt $\dim\{\text{tr} = 1\} = 5$ und weiter $\dim(\Sigma) = 4$. \square

Konkret verwenden werde ich die Zentralprojektion

$$r: W \longrightarrow \Sigma^4, A \longmapsto \frac{\text{id}}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{A - \frac{\text{id}}{3}}{\|A - \frac{\text{id}}{3}\|} \quad (\spadesuit)$$

auf die Sphäre Σ^4 um $\frac{\text{id}}{3}$ vom Radius $\sqrt{\frac{2}{3}}$ in $\{\text{tr} = 1\}$.

DIE DREIECKSMODELLE NACH [ARNOLD II]

Ein Punkt $z \in \mathbb{C}^3$ ist ein Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1 und z_2 in der Ebene \mathbb{C} . $\|z\|^2 = 1$ bedeutet Trägheitsmoment $\sum_{\nu} |z_{\nu}|^2 m_{\nu} = 1$, wenn sich in den Eckpunkten Einheitsmassen befinden. $U(1)$ operiert durch Drehungen, $(\bar{\quad})$ durch die Spiegelung an \mathbb{R} , zusammen erhält man die übliche $O(2)$ -Operation auf \mathbb{C} . $\mathbb{C}P^2$ wird demnach durch Dreiecke in \mathbb{C} mit Trägheitsmoment 1 modulo Drehungen, $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$ durch ebensolche modulo Drehungen und Spiegelungen dargestellt. $\mathbb{R}P^2$ entsprechen in beiden Fällen die kollinearen Dreiecke. Die $O(3)$ -Operation ist in diesen Modellen leider unanschaulich.

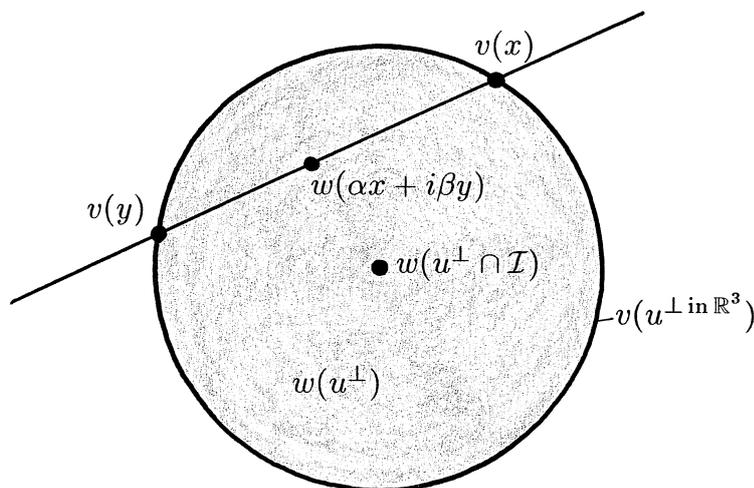
2.3 Lemma. *Das Bild von w ist W und $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad}) \xrightarrow{w} W$ ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. $w(z) = (\operatorname{Re}(z_{\mu} \bar{z}_{\nu}))_{\mu\nu}$ ist die Grammatrix von z_0, z_1, z_2 , denn $\operatorname{Re}(a\bar{b})$ ist das Standardskalarprodukt von \mathbb{C} als reellem Vektorraum. Aus

$$\operatorname{rk} w(z) = \dim \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{z_0, z_1, z_2\} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbb{R}z \in \mathbb{R}P^2 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt mit Hilfe des Dreiecksmodells $w(\mathbb{C}P^2) = W$. Aus der Grammatrix lassen sich die Längen der Vektoren und die Winkel zwischen ihnen rekonstruieren. Zwei Dreiecke, i. e. Tripel von Vektoren, mit gleichen Längen und Winkeln lassen sich aber bereits durch $O(2)$ ineinander überführen. w ist daher bijektiv. Schließlich ist w stetig und, da $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$ kompakt ist, sogar ein Homöomorphismus. \square

Nun sind wieder die geometrischen Sachverhalte zu übertragen: Wegen $w = v$ auf $\mathbb{R}P^2$ bleiben die Bilder der reellen Punkte und der reell projektiven Geraden unverändert. Für $x, y \in S^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt die in Zeichnung 14 dargestellte Beziehung $w(\alpha x + i\beta y) = \alpha^2 v(x) + \beta^2 v(y)$.



Zeichnung 14: Bild unter w einer spaltenden komplex projektiven Geraden

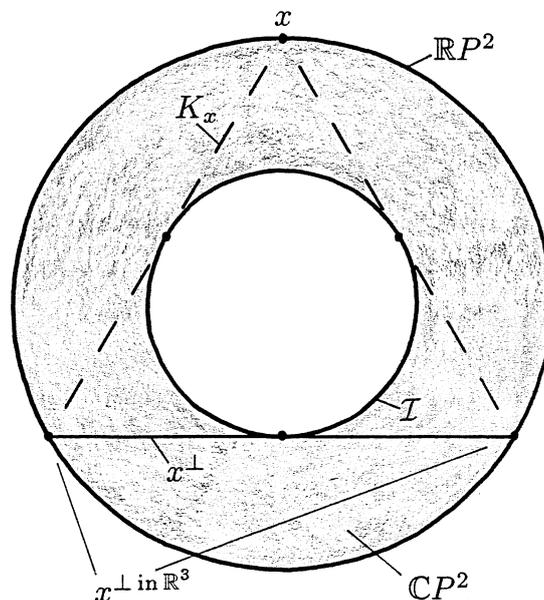
Zusammen mit 2.1 folgt daraus für $u \in S^2$: Das Bild der reell projektiven Geraden u^\perp in \mathbb{R}^3 unter w ist gleich dem Bild unter v : eine Kreislinie. Das Bild unter w der spaltenden komplex projektiven Geraden u^\perp ist die entsprechende Kreisscheibe, das Bild der beiden imaginären Punkte von u^\perp ist der Kreismittelpunkt. Die von der Kreislinie aufgespannte Ebene besteht gänzlich aus degenerierten Formen. Mit jeder spaltenden komplex projektiven Geraden vollzieht sich das komplex eindimensionale Analogon zu w :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 / (\bar{\quad}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S^2 & \xrightarrow{\text{pr}} & D^2 \\ (a_1, a_2, a_3) & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array}$$

Das Bild $w(K_x)$ eines Komplements K_x ist der Kreiskegel mit Spitze $v(x)$ und Basis $v(x^\perp$ in \mathbb{R}^3):

$$\begin{aligned} w(\mathbb{C} \cdot (\cos \varrho \quad i \sin \varrho \cos \alpha \quad i \sin \varrho \sin \alpha)) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \varrho (1 + \cos 2\alpha) & \frac{1}{2} \sin^2 \varrho \sin 2\alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \varrho \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin^2 \varrho (1 - \cos 2\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \varrho \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spitze}} + \sin^2 \varrho \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Mittelpunkt}} + \underbrace{\cos 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sin 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Kreislinie vom Radius } \frac{1}{\sqrt{2}}} \right], \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

topologisch also eine 2-Scheibe.



Zeichnung 15: Lage der Untermannigfaltigkeiten

2.4 Die Lage der Untermannigfaltigkeiten $\mathbb{R}P^2$, \mathcal{I} , x^\perp und K_x zueinander symbolisiert Zeichnung 15. Tatsächlich zu sehen ist die von den Bildern unter w einer beliebigen Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) des \mathbb{R}^3 affin erzeugte Ebene A anstatt $\{\text{tr} = 1\}$ und darin $w(b_1) = x$, ferner $w(x^\perp \text{ in } \mathbb{R}^3) \cap A = \{w(b_2), w(b_3)\}$ statt $x^\perp \text{ in } \mathbb{R}^3$, $w(K_x) \cap A$ statt K_x , $w(x^\perp) \cap A$ statt x^\perp , die Kreislinien um $\frac{\text{id}}{3}$ in A der Radien $\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{1}{6}}$ statt $\mathbb{R}P^2$ bzw. \mathcal{I} , sowie der durch sie begrenzte Kreisring statt $\mathbb{C}P^2$. Der Abstand zwischen $\frac{\text{id}}{3}$ und $w(z)$ hängt nur vom $O(3)$ -Orbit von z , d. h. von der Exzentrizität von z ab. Er liegt zwischen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ für reelle und $\sqrt{\frac{1}{6}}$ für imaginäre Punkte, weshalb die Kreislinien dieser Radien $\mathbb{R}P^2$ und \mathcal{I} und der Kreisring $\mathbb{C}P^2$ sinnvoll vertreten.

Etwas realistischer wäre eine dreidimensionale Version von Zeichnung 15 — vgl. Zeichnung 16 —, da sie $w(x^\perp)$ und K_x , mithin auch deren reelle und imaginäre Punkte $w(x^\perp) \cap \mathbb{R}P^2$, $w(x^\perp) \cap \mathcal{I}$, $K_x \cap \mathbb{R}P^2$ und $K_x \cap \mathcal{I}$ vollständig enthielte.

DAS ELLIPSENMODELL FÜR $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$

Erinnert sei an das Ellipsenmodell \mathfrak{E} für $\mathbb{C}P^2$ aus Proposition 1.1 und die Diskussion der $(\bar{\quad})$ -Operation in 1.6. Mit den Lemmata 2.2 und 2.3 folgt daraus das

2.5 **Korollar.** Die Menge der (unorientierten) Ursprungsellipsen im \mathbb{R}^3 mit $a^2 + b^2 = 1$, wobei a die Länge der großen und b die Länge der kleinen Halbachsen bezeichnet, ist, versehen mit der natürlichen Topologie, homöomorph zur vierdimensionalen Sphäre.

Differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$

2.6 Ich wende Satz I 7.7 auf die $\{\text{id}, (\bar{\quad})\}$ -Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^2$ an und vergleiche die erhaltene differenzierbare Struktur auf dem Quotienten mit der durch den Homöomorphismus $r \circ w$ induzierten.

Die auftretenden Scheibentypen sind der triviale und der nach Proposition I 5.10 (2) eindeutig linearisierbare $\mathbb{Z}_2 \rightarrow O(2)$, $\pm 1 \mapsto \pm \text{id}$. Zu ihnen gehören das Hauptstratum $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2$ bzw. die Fixpunktmenge $\mathbb{R}P^2$. Versieh $\mathbb{R}P^2$ mit der Normaltube aus II 3.1. Zu diesen Daten gibt Satz I 7.7 eine differenzierbare Struktur \mathcal{D} auf $\mathbb{C}P^2 / (\bar{\quad})$ an, deren Isotopieklasse nach Lemma 8.10 (5) nicht von der Wahl der Tube abhängt. Setze den Keim in 0 von

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \left(\sin^{-2} x - \frac{3}{2}\right)^{-1} = x^2 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{233}{180}x^6 + \dots \end{aligned}$$

zu einem Homöomorphismus von $\mathbb{R}_{\geq 0}$, der auf $\mathbb{R}_{> 0}$ ein Diffeomorphismus ist, fort. \mathcal{V}_f , \mathcal{B}_f und \mathcal{D}_f bezeichne die mittels f gemäß I 7.15 modifizierten Strukturen, im wesentlichen gilt also

$$\begin{aligned} (\mathbb{C} / \pm \text{id}, \mathcal{V}_f) &\cong (\mathbb{C}, \mathcal{V}^{\text{Standard}}). \\ \pm \varrho e^{i\alpha} &\longmapsto f(\varrho) e^{i2\alpha} \end{aligned}$$

\mathcal{D}_f und \mathcal{D} sind zwar nicht gleich, aber offenbar isotop im Sinne von Lemma 8.10 (5'). Mit den Abbildungen w aus (\clubsuit) und r aus (\spadesuit) gilt nun der

Satz. *Der Quotient $\mathbb{C}P^2 / (\bar{})$ besitzt mit $[\mathcal{D}_f]$ eine ausgezeichnete Isotopieklasse differenzierbarer Strukturen, und das Kompositum $r \circ w$ ist ein $SO(3)$ -äquivarianter Diffeomorphismus von $(\bar{} \setminus P(V_{\mathbb{C}}), \mathcal{D})$ nach $(S^4, \mathcal{E}^{\text{Standard}})$.*

2.7

BEWEIS. Der verbleibende Beweis der Diffeomorphie erfolgt in fünf Schritten.

(1) $h := r \circ w$ ist ein Homöomorphismus nach Lemma 2.3 und Lemma 2.2.

(2) $h \circ \omega: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \Sigma^4$ ist differenzierbar, wie an der Abbildungsvorschrift sofort abzulesen ist.

Nach 1.7 ist $\gamma(t) = \mathbb{C} \cdot (\cos tb_1 + i \sin tb_2)$, wobei (b_1, b_2) ein Orthonormalsystem in \mathbb{R}^3 bezeichnet, die allgemeine horizontale Geodätische in $\mathbb{C}P^2$. Die Ableitung von $w \circ \gamma(t) = \cos^2 t^* b_1 b_1 + \sin^2 t^* b_2 b_2$ verschwindet genau dann, wenn t ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, und genau dann ist $\gamma(t) \in \mathbb{R}P^2$. Für $z \in \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2$ wird $T_z(\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2)$ vom Tangentialraum des $O(3)$ -Orbits von z und der Ableitung der eindeutigen horizontalen Geodätischen durch z aufgespannt. $\mathbb{R}P^2$ ist ein einziger $O(3)$ -Orbit. Anhand dessen überlegt man sich, daß der Rang von $h \circ \omega$ auf den Strata konstant, und zwar gleich 4 bzw. gleich 2 sein muß.

Da die Strata von $\mathbb{C}P^2 / (\bar{})$ die kanonischen differenzierbaren Strukturen tragen und die Einschränkungen von h jeweils differenzierbar und von maximalem Rang sind, ist h stratumweise ein Diffeomorphismus.

(3) h ist dann und nur dann ein Diffeomorphismus, wenn h eine (differenzierbare) Einbettung nahe $\mathbb{R}P^2$ ist, und genau dann ist $(N\mathbb{R}P^2 / (\bar{}), \mathcal{B}_f) \xrightarrow{h \circ \exp} \Sigma^4$ eine Einbettung nahe dem Nullschnitt.

(4) Wegen der $O(3)$ -Äquivarianz der Normalenexponentialabbildung genügt es zu zeigen, daß für eine einzige Faser $N_x \mathbb{R}P^2$ die Abbildung $(N_x \mathbb{R}P^2 / (\bar{}), \mathcal{V}_f) \xrightarrow{h \circ \exp} \Sigma^4$ nahe dem Nullpunkt eine Einbettung ist. Ich wähle dazu $x = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) Als Karte ψ von Σ^4 in einer Umgebung von $A := w(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ wähle ich die Zentralprojektion mit Zentrum $\frac{id}{3}$ auf

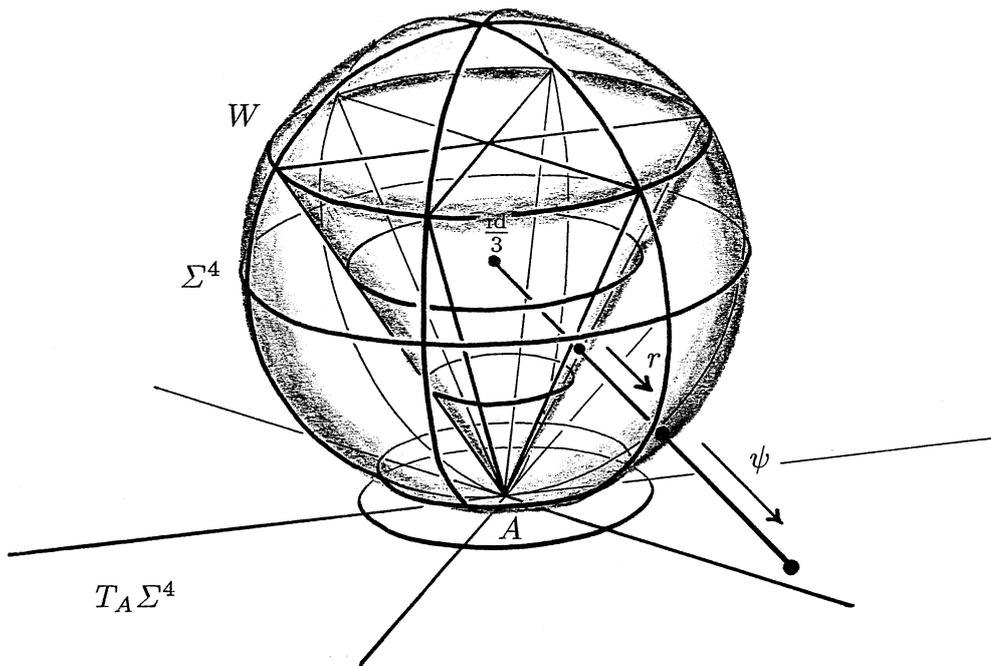
$$T_A \Sigma^4 = \text{span} \left\{ \frac{id}{3}, A - \frac{id}{3} \right\}^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

aufgefaßt als Teilmenge von $SA(\mathbb{R}^3)$. Dadurch wird $\psi \circ r$ ebenfalls eine Zentralprojektion mit demselben Zentrum. Eine kurze Rechnung, ausgehend von (\heartsuit), erweist

$$x \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \varrho} - \frac{3}{2}} \left[\cos 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sin 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$$

als das Bild von $x + yi = f(\varrho)e^{i2\alpha}$ unter der komponierten Abbildung

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} (N_x \mathbb{R}P^2 / (\bar{}), \mathcal{V}_f) \xrightarrow{h \circ \exp} W \xrightarrow{r} \Sigma^4 \xrightarrow{\psi} T_A \Sigma^4. \quad \square$$



Zeichnung 16: Zum Beweis des Satzes 2.7

Zeichnung 16 veranschaulicht Punkt (5) des Beweises. Tatsächlich zeigt sie den von $\frac{id}{3}$, $\begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum U von $SA(\mathbb{R}^3)$. Der Schnitt $W \cap U$ besteht aus der Vereinigung des Kreiskegels $w(K_x)$ mit der Kreisscheibe $w(x^\perp)$, der Schnitt $T_A \Sigma^4 \cap U$ ist die Ebene $N_A w(\mathbb{R}P^2)$, der Schnitt $\Sigma^4 \cap U$ ist die 2-Sphäre $\exp(N_A w(\mathbb{R}P^2))$. „Normal zu $\mathbb{R}P^2$ ist alles zu sehen, tangential nichts.“

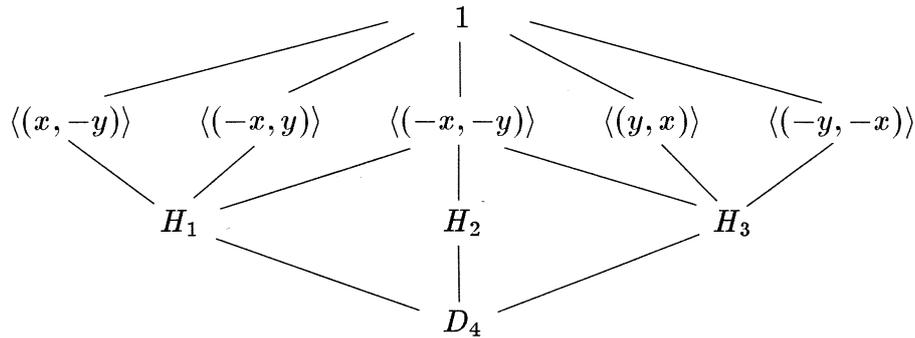
§ 3 Die Homöomorphie von $SP^2(\mathbb{C}P^1)$ zu $\mathbb{C}P^2$

Grundlage dieses Paragraphen ist [Massey]. Wie dieser befaße ich mich nicht mit Differenzierbarkeit: Sie wäre analog zu 2.6 zu behandeln, soweit dieselben Scheibendiagramme auftreten, und die symmetrischen Potenzen von \mathbb{C} sind in der algebraischen Geometrie besser aufgehoben.

Die D_4 -Operation auf $S^2 \times S^2$

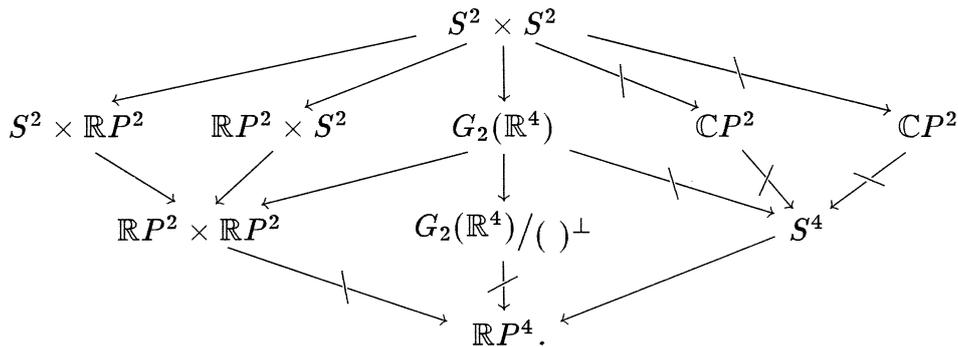
- 3.1 Die Isometriegruppe von $S^2 \times S^2$ ist $(SO(3) \times SO(3)) \rtimes D_4$, wobei die Diedergruppe etwa von der Vertauschung der Faktoren und der Antipodenabbildung des ersten Faktors erzeugt wird. Die Untergruppen von D_4 zeigt das folgende Diagramm. Angegeben sind statt der Involutionen die Bilder von $(x, y) \in S^2 \times S^2$ unter ihnen. H_1, H_2 und H_3 liegen dann fest. Die innere Automorphismen von D^4 können nur $\langle\langle (x, -y) \rangle\rangle$ mit $\langle\langle (-x, y) \rangle\rangle$

oder $\langle(y, x)\rangle$ mit $\langle(-y, -x)\rangle$ vertauschen, die äußeren Automorphismen spiegeln das Diagramm zusätzlich an seiner Symmetrieachse.



Proposition. Das entsprechende Diagramm der Quotienten von $S^2 \times S^2$ ist

3.2



Die Pfeile stehen für unverzweigte, die durchgestrichenen für verzweigte, zweiblättrige Überlagerungen.

BEWEIS. Die Homöomorphien

$$\begin{aligned} (x, -y) \setminus S^2 \times S^2 &\approx S^2 \times RP^2, \\ (-x, y) \setminus S^2 \times S^2 &\approx RP^2 \times S^2 \quad \text{und} \\ H_1 \setminus S^2 \times S^2 &\approx RP^2 \times RP^2 \end{aligned}$$

sind trivial. $(y, x) \setminus S^2 \times S^2 \approx CP^2$ und $D_4 \setminus S^2 \times S^2 \approx RP^4$ folgen aus Lemma 3.6. $(-y, -x) \setminus S^2 \times S^2 \approx CP^2$ folgt aus der Konjugiertheit von (x, y) und $(-y, -x)$ in D_4 . $(-x, -y) \setminus S^2 \times S^2 \approx G_2(\mathbb{R}^4)$ und $H_2 \setminus S^2 \times S^2 \approx G_2(\mathbb{R}^4)/(\)^\perp$ folgen aus Lemma 3.9. $H_3 \setminus S^2 \times S^2 \approx S^4$ schließlich folgt aus Satz 2.7. Welche der Überlagerungen verzweigt sind, ist elementar nachzurechnen. \square

Symmetrische Potenzen

Der Quotient $SP^n(X) := \mathfrak{S}_n \setminus X^n$ der n . Potenz eines Raumes X durch die kanonische Operation der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n heißt seine n . symmetrische Potenz. Ein Element von $SP^n(X)$ kann als eine Menge von — algebraisch gezählt n — Punkten

3.3 aufgefaßt werden. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^n P(\mathbb{C}[X, Y]_1) &\longrightarrow P(\mathbb{C}[X, Y]_n) \\ (\mathbb{C}^\times (a_\nu X + b_\nu Y))_\nu &\longmapsto \mathbb{C}^\times \prod_{\nu} (a_\nu X + b_\nu Y) \end{aligned}$$

induziert einen Homöomorphismus $SP^n(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Dies ist eine projektive Formulierung der algebraischen Abgeschlossenheit von \mathbb{C} .

3.4 Die Antipodenabbildung A von S^2 schreibt sich auf $\mathbb{C}P^1$ als $(z_0 : z_1) \mapsto (-\bar{z}_1 : \bar{z}_0)$, ihre $2n$. symmetrische Potenz $SP^{2n}(A)$ auf $\mathbb{C}P^{2n}$ als

$$(z_0 : \dots : z_{2n}) \longmapsto (\bar{z}_{2n} : -\bar{z}_{2n-1} : \dots : -\bar{z}_1 : \bar{z}_0).$$

Dies ist gerade die komplexe Konjugation K auf $\mathbb{C}P^{2n}$ bezüglich der neuen, der Ausarbeitung [Dold]s einer Stelle in [Massey] entnommenen Koordinaten

$$\begin{aligned} w_\nu &:= z_\nu + z_{2n-\nu}, \quad w_{2n-\nu} := i(z_\nu - z_{2n-\nu}) \quad \text{für gerades } \nu < n, \\ w_\nu &:= i(z_\nu + z_{2n-\nu}), \quad w_{2n-\nu} := z_\nu - z_{2n-\nu} \quad \text{für ungerades } \nu < n \text{ und} \\ w_n &:= i^n z_n \quad (\text{vgl. Lemma 1.3}). \end{aligned}$$

3.5 Für die Fixpunktmenngen gilt

$$SP^n(\mathbb{R}P^2) \approx (SP^{2n}(\mathbb{C}P^1))^{SP^{2n}(A)} \approx (\mathbb{C}P^{2n})^K \approx \mathbb{R}P^{2n},$$

die erste Homöomorphie dabei wegen Lemma 2 aus [Massey], auf dessen Verallgemeinerbarkeit mich Dr. Gerald Höhn aufmerksam gemacht hat:

Lemma. Sei $G \rightarrow \text{Homöo}(X)$ eine Operation einer topologischen Gruppe auf einem kompakten topologischen Raum, so daß $\#Gx =: k$ endlich ist und nicht von $x \in X$ abhängt. Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$

$$[SP^{nk}(X)]^G \approx SP^n(G \backslash X).$$

BEWEIS. Leger gesprochen besteht ein Element M von $SP^{nk}(X)$ aus nk nicht unbedingt verschiedenen Elementen von X . M ist genau dann ein Fixpunkt der auf $SP^{nk}(X)$ induzierten G -Operation, wenn M in lauter G -Orbits zerfällt. Da k -elementig, sind dies gerade n nicht unbedingt verschiedene Orbits. Die bei einem formalen Beweis erhaltene stetige Bijektion $SP^n(G \backslash X) \longrightarrow [SP^{nk}(X)]^G$ ist wegen der Kompaktheit von X ein Homöomorphismus. \square

Durch Spezialisierung auf $n = 2$ folgt aus 3.3 und 3.5 das

3.6 **Lemma.** $SP^2(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^2$ und $SP^2(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^4$.

Die Quaternionen

Sei \mathbb{H} vorerst *ein* Schiefkörper über \mathbb{R} der Dimension 4, wodurch \mathbb{H} bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist (siehe [Zahlen], Kap. 7, S. 158 ff). Setze $\text{Im } \mathbb{H} := \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \leq 0\}$ und $\text{Re } \mathbb{H} := \{p \in \mathbb{H} \mid q^2 \geq 0\}$. Dann ist $\mathbb{H} = \text{Re } \mathbb{H} \oplus \text{Im } \mathbb{H}$ und $\text{Re } \mathbb{H} = \mathbb{R}$. \mathbb{R} ist auch das Zentrum von \mathbb{H} . $\langle q, r \rangle := \text{Re}(q\bar{r}) = \frac{1}{2}(q\bar{r} + r\bar{q})$ ist ein Skalarprodukt, $(q, r) \mapsto \text{Re}(qr)$ eine symmetrische Bilinearform der Signatur $(1, 0, 3)$ (Lorentzform). Die Automorphismengruppe von \mathbb{H} ist $\text{Inn}(Sp(1)) = SO(\text{Im } \mathbb{H})$. Wähle nun eine Orthonormalbasis (i, j, k) von $\text{Im } \mathbb{H}$ mit $i \cdot j = k$ und nenne sie positiv orientiert.

$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ operiert auf \mathbb{H} durch Multiplikation von links und rechts. Durch Einschränkung der Linksmultiplikation auf \mathbb{C} wird \mathbb{H} ein komplexer Vektorraum und weiter durch Einschränkung der Rechtsmultiplikation auf $Sp(1)$ ein komplexer $Sp(1)$ -Modul.

Durch die Identifizierungen

3.7

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{C} \right\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}^2 & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ a + bj & \longleftarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} & \longleftarrow & (a \ b) & \longleftarrow & (\text{Re } a \ \text{Im } a \ \text{Re } b \ \text{Im } b) \end{array}$$

werden gleichzeitig \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 , $\text{Im } \mathbb{H}$ mit \mathbb{R}^3 und die Norm-1-Teilmengen $Sp(1)$, $SU(2)$ und S^3 miteinander identifiziert.

Die Hopfabbildung

3.8

Betrachte das ähnlich schon in Proposition I 5.10 (3) aufgetretene Diagramm

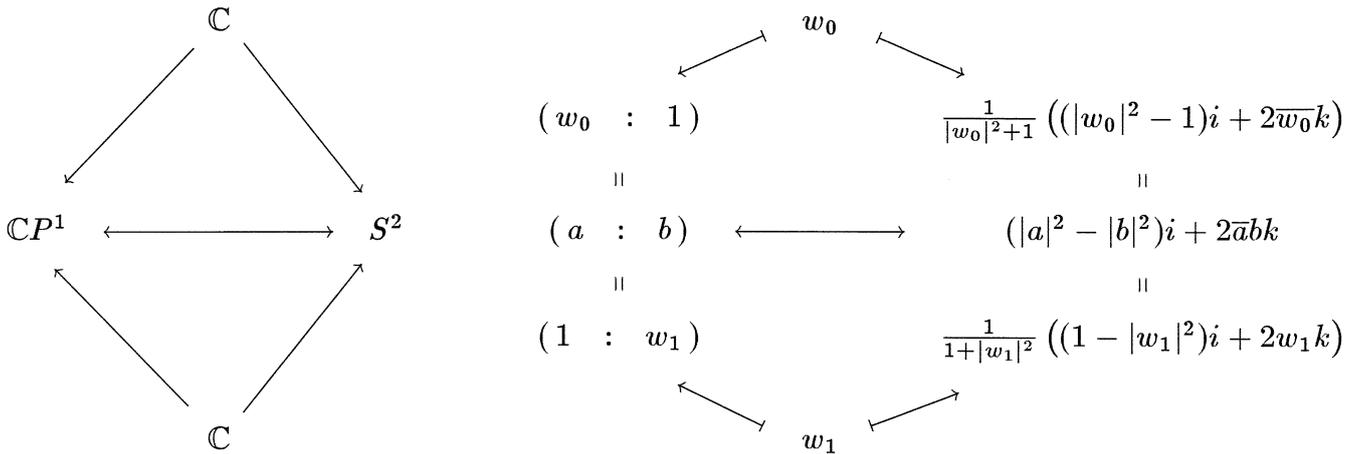
$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & \bar{\alpha} \dots \alpha \\ Sp(1) & \xrightarrow{\text{Ad}} & SO(\text{Im } \mathbb{H}) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{h} & \text{Im } \mathbb{H}. \\ q & \longmapsto & \bar{q}iq \end{array}$$

Explizit ist

$$\bar{\alpha} \dots \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2(-\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) & 2(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3) \\ 2(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) & \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2(-\alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3) \\ 2(-\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3) & 2(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3) & \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

und $(\overline{a + bj})i(a + bj) = (|a|^2 - |b|^2)i + 2\bar{a}bk$. Die Ad-Äquivarianz und $h(1) = i$ legen h bereits fest. h ist reell homogen vom Grad 2. Die Einschränkung $S^3 \xrightarrow{h} S^2$ ist „die“ Hopfabbildung. Ebenfalls induziert h den äquivarianten Diffeomorphismus $\mathbb{C}P^1 = U(1) \backslash S^3 \rightarrow S^2$. Dabei werden die beiden Standardkarten des $\mathbb{C}P^1$ im wesent-

lichen zu stereographischen Projektionen:



Beachte dazu, daß

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n && \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ w &\longmapsto \frac{1}{1+\|w\|^2} (1 - \|w\|^2, 2w) \end{aligned}$$

die Umkehrabbildung zur stereographische Projektion

$$\begin{aligned} S^n \setminus \{(-1, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\xi, x) &\longmapsto \frac{x}{1+\xi} \end{aligned}$$

vom Südpol ist.

$S^2 \times S^2$ als Graßmannsche

$S^3 \times S^3 \xrightarrow{h \times h} S^2 \times S^2$ ist die Quotientenabbildung von $G := \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ auf $T \backslash G$, wobei $T := S^1 \times S^1$. Auf $T \backslash G$ operieren die Weylgruppe N/T von links sowie die äußeren Automorphismen $\text{Out}(G) \cong \{\text{id}_G, \text{Vertauschung der Faktoren}\}$, und zwar operiert $N/T \rtimes \text{Out}(G) \cong \mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong D_4$ wie in 3.1 beschrieben.

$$\begin{aligned} \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) &\longrightarrow \text{SO}(4) \\ (q, r) &\longmapsto \bar{q} \cdots r \end{aligned}$$

gibt $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ als $\text{Spin}(4)$ zu erkennen. Daher ist $G/T_{\max} = \text{SO}(4)/T_{\max}$ die Graßmannmannigfaltigkeit $\tilde{G}_2(\mathbb{H})$ der reellen orientierten Ebenen in \mathbb{H} . Entspricht $(x, y) \in S^2 \times S^2$ der orientierten Ebene $U \in \tilde{G}_2(\mathbb{H})$, so entspricht $(-x, -y)$ der umorientierten Ebene $-U$, $(x, -y)$ dem orthogonalen Komplement U^\perp und (y, x) quaternionalen Konjugat \bar{U} . In Bezug auf Proposition 3.2 ist damit bewiesen:

3.9 Lemma. $(-x, -y) \backslash S^2 \times S^2 \approx G_2(\mathbb{R}^4)$ und $H_2 \backslash S^2 \times S^2 \approx G_2(\mathbb{R}^4) / (\quad)^\perp$.

Interpretationen von $S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$

Nachdem Proposition 3.2 vollständig bewiesen ist, möchte ich die Abbildung 3.3 für $n = 2$ leicht umformulieren und auf verschiedene Weisen interpretieren:

Proposition. *Die Abbildung*

3.10

$$f : \quad \mathbb{H} \quad \times \quad \mathbb{H} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^3$$

$$(a_0 + a_1j, b_0 + b_1j) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-i(a_0b_1 + a_1b_0), a_0b_0 + a_1b_1, i(a_0b_0 - a_1b_1))$$

ist \mathbb{C} -bilinear, $Ad_{Sp(1)}$ -äquivariant und induziert einen äquivarianten Homöomorphismus $SP^2(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{C}P^2$. Durch diese Eigenschaften ist sie bis auf Multiplikation mit einem Element aus \mathbb{C}^\times eindeutig bestimmt.

Ein Beweis dieser Proposition ergibt sich aus den folgenden vier Interpretationen der Abbildungsvorschrift und dem Nachweis der Kommutativität des auf der nächsten Seite abgebildeten Diagramms.

DIE ALGEBRAISCHE INTERPRETATION $\mathbb{C}[X, Y]_1 \times \mathbb{C}[X, Y]_1 \rightarrow \mathbb{C}[X, Y]_2$

Diese Interpretation ist ein Spezialfall von 3.3. Die homogenen Polynome werden schlicht miteinander multipliziert. Üblicherweise schreibt man

$$\mathbb{C}P^1 \quad \times \quad \mathbb{C}P^1 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}P^2$$

$$((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) \longmapsto (a_0b_0 : a_0b_1 + a_1b_0 : a_1b_1)$$

oder in einer der Standardkarten

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$(a_1, b_1) \longmapsto (b_1 + a_1, a_1b_1)$$

wodurch man die beiden ersten elementarsymmetrischen Funktionen erhält. Die dabei für $\mathbb{C}[X, Y]_2$ gewählte Basis (X^2, XY, Y^2) ist für die hiesigen Zwecke jedoch ungeeignet (siehe 3.4 und 3.11).

DIE MULTILINEARE INTERPRETATION $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}|\mathbb{H} \rightarrow \Sigma^2\mathbb{H}$

Aus praktischen Gründen schreibe ich $q|r \in \mathbb{H}|\mathbb{H}$ anstelle von $\bar{q} \otimes r \in \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$, d.h. es gelten die Rechenregeln $(p + q)|r = p|r + q|r$, $q|(r + s) = q|r + q|s$ und $(\lambda q)|r = q|(\lambda r)$. $\mathbb{H}|\mathbb{H}$ ist \mathbb{C} -Vektorraum via $\lambda \cdot q|r = \lambda q|r = q|\lambda r$ und komplexer $Sp(1)$ -Modul via $q|r \cdot \alpha = q\alpha|r\alpha$. Die Involution $q|r \mapsto r|q$ eröffnet die Möglichkeit symmetrischer und antisymmetrischer Tensoren, als $Sp(1)$ -Modul ist

$$\mathbb{H}|\mathbb{H} = \Sigma^2\mathbb{H} \oplus \Lambda^2\mathbb{H} = (3\text{-dim. irreduzibel}) \oplus (1\text{-dim. trivial}).$$

Diese Interpretation als die kanonische bilineare Abbildung in das Tensorprodukt, gefolgt von der Projektion auf $\Sigma^2\mathbb{H}$, zeigt sofort die Äquivarianz wie auch, nach dem Schurschen Lemma, die annähernde Eindeutigkeit.

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda(a_0X + a_1Y)\alpha, \mu(b_0X + b_1Y)\alpha) & \xrightarrow{\quad} & \lambda\mu(a_0X\alpha + a_1Y\alpha)(b_0X\alpha + b_1Y\alpha) \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 (\lambda(a_0 + a_1j)\alpha, \mu(b_0 + b_1j)\alpha) & \xrightarrow{\quad} & \lambda\mu\frac{1}{2}(q\alpha|r\alpha + r\alpha|q\alpha) \\
 = (\lambda q\alpha, \mu r\alpha) & \begin{array}{l} \nearrow \lambda q\alpha|\mu r\alpha \\ \searrow \end{array} & \updownarrow \\
 & \begin{array}{l} \updownarrow \\ \left(\begin{array}{cc} \operatorname{Re} \lambda\mu & -\operatorname{Im} \lambda\mu \\ \operatorname{Im} \lambda\mu & \operatorname{Re} \lambda\mu \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}qjr\alpha \\ \bar{\alpha}qkr\alpha \end{pmatrix} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} \updownarrow \\ \left(\begin{array}{cc} \operatorname{Re} \lambda\mu & -\operatorname{Im} \lambda\mu \\ \operatorname{Im} \lambda\mu & \operatorname{Re} \lambda\mu \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \bar{q}jr \\ \operatorname{Im} \bar{q}kr \end{pmatrix} \operatorname{Ad} \alpha \end{array} \\
 & & & \updownarrow \\
 & & & \lambda\mu\frac{1}{\sqrt{2}}(-i(a_0b_1 + a_1b_0), a_0b_0 + a_1b_1, i(a_0b_0 - a_1b_1)) \operatorname{Ad} \alpha
 \end{array}$$

\cap

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[X, Y]_1 \times \mathbb{C}[X, Y]_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}[X, Y]_2 \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \begin{array}{l} \nearrow \mathbb{H}|\mathbb{H} \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \Sigma^2\mathbb{H} \\ \updownarrow \\ \xrightarrow{\quad} (\operatorname{Im} \mathbb{H})^2 \\ \updownarrow \\ \mathbb{C}^3 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \updownarrow \\ \mathbb{H}^2 \end{array} & \\
 & \updownarrow & \\
 & \cup &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 P(\mathbb{C}[X, Y]_1) \times P(\mathbb{C}[X, Y]_1) & \xrightarrow{\quad} & P(\mathbb{C}[X, Y]_2) \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 S^2 \times S^2 & \begin{array}{l} \nearrow P(\Sigma^2\mathbb{H}) \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} \updownarrow \\ P((\operatorname{Im} \mathbb{H})^2) \\ \updownarrow \\ \mathbb{C}P^2 \end{array}
 \end{array}$$

Diagramm zum Beweis der Proposition 3.10; die Operationen auf den verschiedenen Raumen sind durch $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \operatorname{Sp}(1)$ angedeutet.

DIE ABSTRAKT GEOMETRISCHE INTERPRETATION $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^2 \rightarrow (\text{Im } \mathbb{H})^2$
 \mathbb{H}^2 wird durch

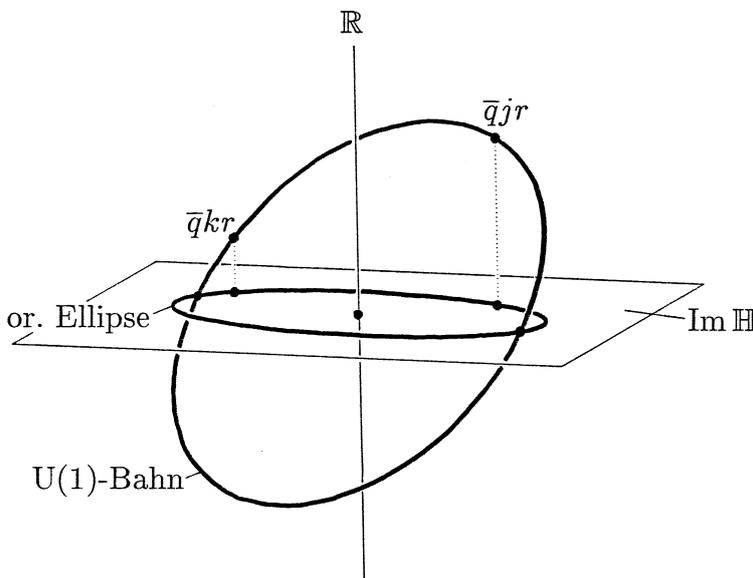
$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{H}^2 \times SO(4) &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \left(z, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \bar{q} \cdot \cdot \cdot r \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Re } z & -\text{Im } z \\ \text{Im } z & \text{Re } z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}ur \\ \bar{q}vr \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein zur Komplexifizierung der Standarddarstellung äquivalenter $SO(4)$ -Modul.

Fasse $(q, r) \in S^3 \times S^3 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ als Repräsentant von $\bar{q} \cdot \cdot \cdot r \in SO(4)$ auf und betrachte dessen Wirkung auf j und k . Ergebnis ist ein allgemeines orthonormales 2-Bein $\bar{q}jr, \bar{q}kr$ in \mathbb{H} . Die $U(1)$ -Bahn $\{ \bar{z}\bar{q}jzr \mid z \in U(1) \} = \{ \bar{z}\bar{q}kzr \mid z \in U(1) \}$ ist gerade der Einheitskreis der erzeugten Ebene.

Die $SO(3)$ -Operation $\bar{\alpha} \cdot \cdot \cdot \alpha$ auf \mathbb{H} ist auf \mathbb{R} trivial, auf $\text{Im } \mathbb{H}$ die Standarddarstellung und kommutiert mit der $U(1)$ -Operation. Die Projektion auf $\text{Im } \mathbb{H}$ liefert daher eine orientierte Ellipse.

Der Verzweigungsort besteht offenbar aus den bereits in $\text{Im } \mathbb{H}$ liegenden Einheitskreisen, d.h. aus den imaginären Punkten des $\mathbb{C}P^2$.



Zeichnung 17: Die abstrakt geometrische Interpretation

DIE ELEMENTARGEOMETRISCHE INTERPRETATION

Dies ist eine Interpretation nur für „unten“, d.h. für $SP^2(S^2) \leftrightarrow \mathfrak{E}$. Ab jetzt seien die Ellipsen statt durch $a^2 + b^2 = 1$ durch $a = 1$ normiert. Zwei Punkte $p_1, p_2 \in S^2$ bestimmen genau eine orientierte, normierte Ellipse mit $n := \frac{p_1 + p_2}{2}$ als Normale und $f := \frac{p_1 - p_2}{2}$ und $-f = \frac{p_2 - p_1}{2}$ als Brennpunkten, denn $n \perp \pm f$ und $\|n\|^2 + \|\pm f\|^2 = 1$. Umgekehrt bestimmt eine orientierte, normierte Ellipse die Punkte $p := n + f$ und $p := n - f$ auf S^2 .

Bei den beiden letzten Interpretationen wurde der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unterdrückt.

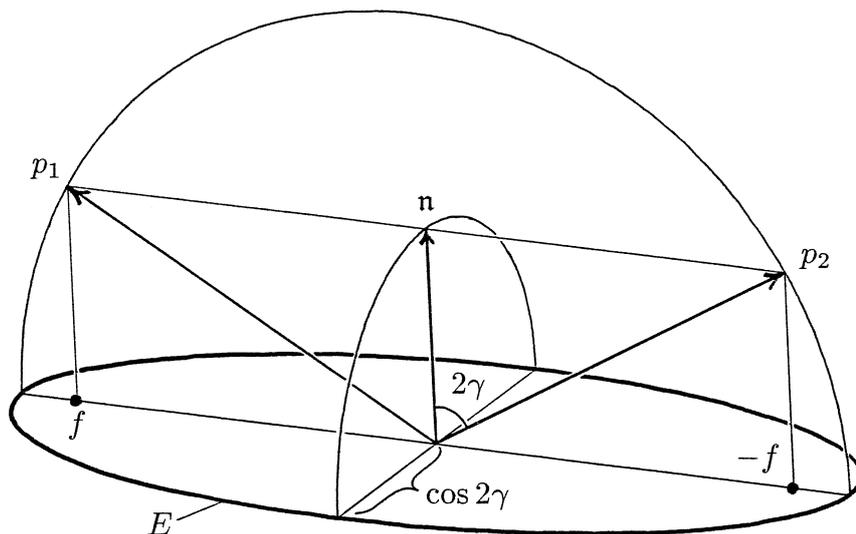
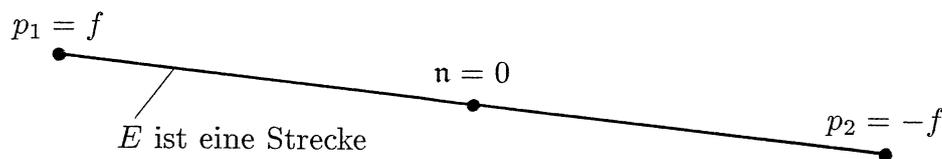
3.11 Es bleibt noch die Übereinstimmung der vier Wege mit der Abbildung f aus Proposition 3.10 zu zeigen. Für die ersten drei folgt dies nach endlicher Rechnung mit den einander entsprechende Basen

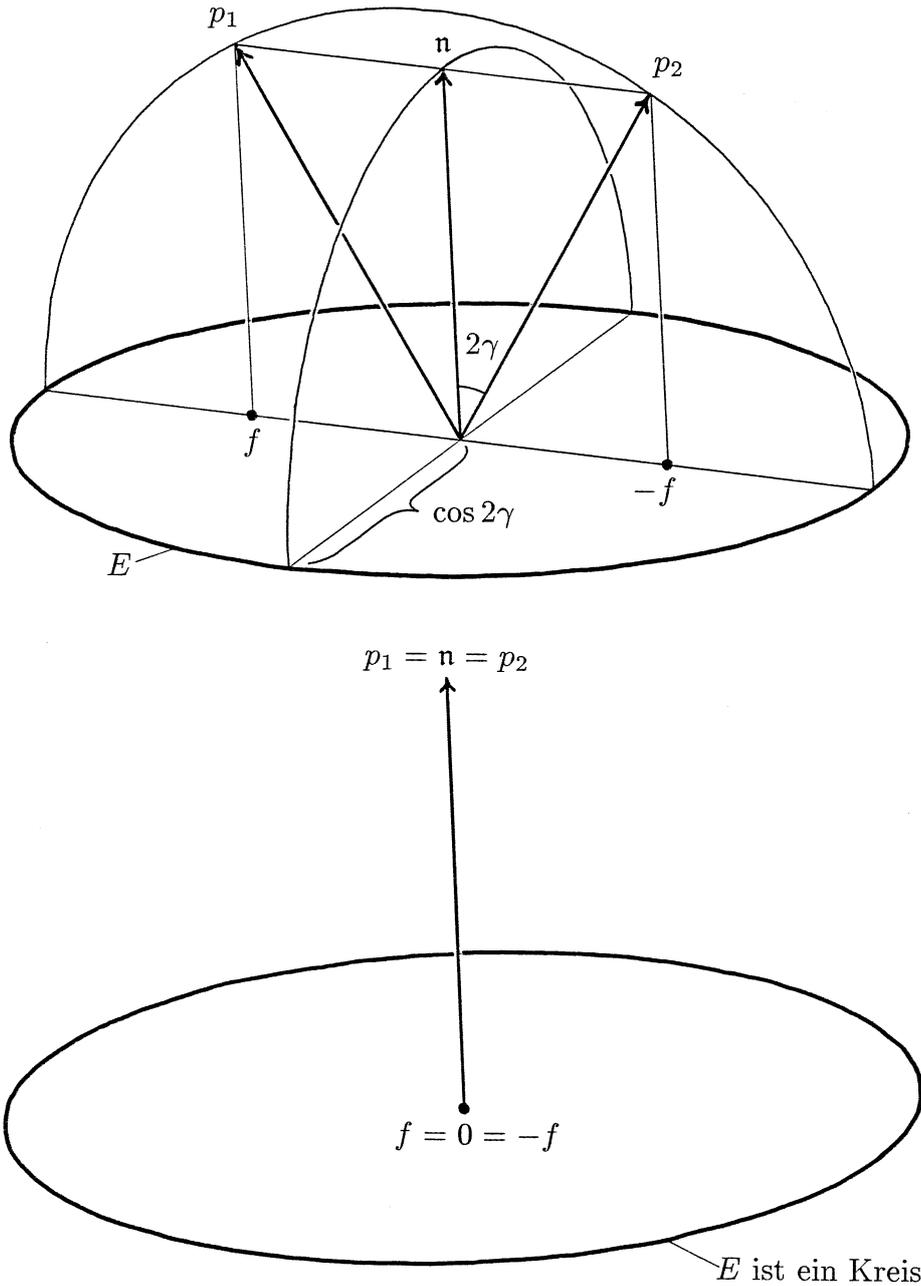
$$\begin{array}{l}
 \mathbb{C}[X, Y]_2 \\
 \Sigma^2 \mathbb{H} \\
 (\text{Im } \mathbb{H})^2 \\
 \mathbb{C}^3
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 i\sqrt{2}XY & \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 + Y^2) & \frac{i}{\sqrt{2}}(-X^2 + Y^2) \\
 \frac{i}{\sqrt{2}}(1|j + j|1) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1|1 + j|j) & \frac{i}{\sqrt{2}}(-1|1 + j|j) \\
 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \\
 (1\ 0\ 0) & (0\ 1\ 0) & (0\ 0\ 1)
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 \frac{1}{\sqrt{2}}(-1|j + j|1) \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 \mathbb{H}|\mathbb{H} \\
 \mathbb{H}^2.
 \end{array} \right.$$

Für den vierten sei $q = \cos \gamma + \sin \gamma j$ mit $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}$ und $r = \bar{q}$. Einerseits ist das Bild von (q, r) in $S^2 \times S^2$

$$(\cos 2\gamma i + \sin 2\gamma k, \cos 2\gamma i - \sin 2\gamma k) = ((\cos 2\gamma, 0, \sin 2\gamma), (\cos 2\gamma, 0, -\sin 2\gamma)).$$

Die elementargeometrisch konstruierte Ellipse besitzt $(\cos 2\gamma, 0, 0)$ als Normale und $(0, 0, \pm \sin 2\gamma)$ als Brennpunkte. Andererseits ist $f(q, r) = (0, \cos 2\gamma, i)$, das Bild in \mathfrak{E} also die Ellipse $\{ \cos \varphi \cdot (0, \cos 2\gamma, 0) + \sin \varphi \cdot (0, 0, 1) \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$ mit Normalenvektor $(\cos 2\gamma, 0, 0)$. Auch ihre Brennpunkte sind $(0, 0, \pm \sin 2\gamma)$.





Zeichnungen 18–21: Die elementargeometrische Interpretation

Auf diesen (q, r) stimmen beide Abbildungen überein. Da sie aber äquivariant sind und die soeben betrachtete einparametrische Schar von Ellipsen ein Repräsentantensystem des Bahnenraums $\mathfrak{E}/Sp(1)$ ist, stimmen sie gänzlich überein.

Vereinheitlichung

In 3.10 und 2.7 wurden zwei verzweigte, zweiblättrige Überlagerungen betrachtet:

$$\begin{array}{ccccc}
 O(3) \times \{ \text{Vertauschung} \} & \longrightarrow & SO(3) \times (\bar{\quad}) & \longrightarrow & SO(3) \\
 \Omega & & \Omega & & \Omega \\
 S^2 \times S^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^2 & \xrightarrow{g} & \Sigma^4
 \end{array}$$

Angegeben sind die größtmöglichen effektiven isometrischen Äquivarianzgruppen, im folgenden genügen die $SO(3)$ -Operationen. Definiere $J := [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$l: J \times SO(3) \longrightarrow S^2 \times S^2$$

$$(\gamma, A) \longmapsto ((\cos 2\gamma, 0, \sin 2\gamma)A, (\cos 2\gamma, 0, -\sin 2\gamma)A)$$

sowie auf $J \times SO(3)$ die zunehmend schwächeren Äquivalenzrelationen

$$(\gamma, A) \underset{1}{\sim} (\delta, B) : \Leftrightarrow l(\gamma, A) = l(\delta, B),$$

$$(\gamma, A) \underset{2}{\sim} (\delta, B) : \Leftrightarrow f \circ l(\gamma, A) = f \circ l(\delta, B) \text{ und}$$

$$(\gamma, A) \underset{3}{\sim} (\delta, B) : \Leftrightarrow g \circ f \circ l(\gamma, A) = g \circ f \circ l(\delta, B).$$

l induziert das äquivariant kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \underset{1}{\sim} \backslash J \times SO(3) & \longrightarrow & \underset{2}{\sim} \backslash J \times SO(3) & \longrightarrow & \underset{3}{\sim} \backslash J \times SO(3) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ S^2 \times S^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^2 & \xrightarrow{g} & \Sigma^4. \end{array}$$

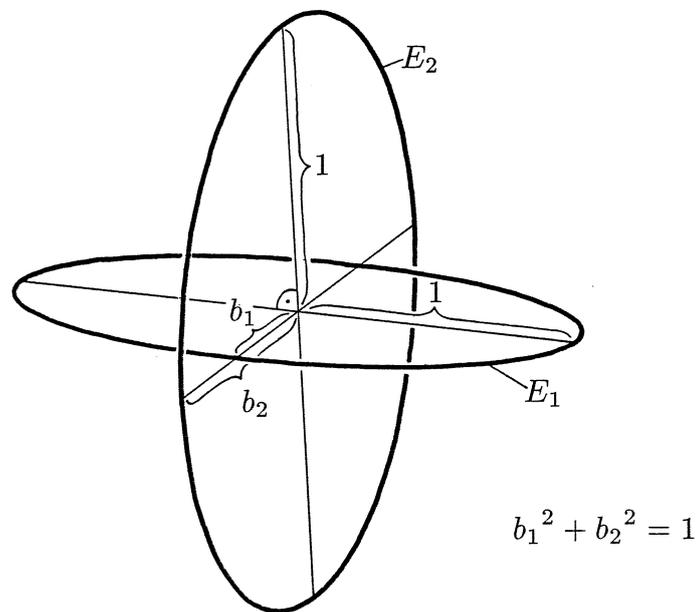
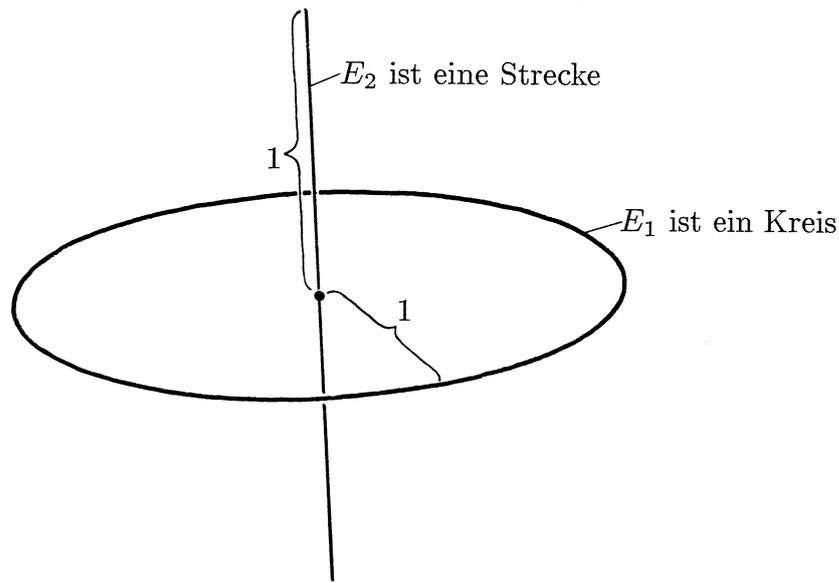
Alle sechs Quotienten $X/SO(3)$ sind so zu J homöomorph, daß die Abbildungen über id_J liegen. Zur Veranschaulichung stehen für $\mathbb{C}P^2$ gemäß Proposition 1.1 die orientierten, für Σ^4 gemäß Korollar 2.5 die unorientierten Ellipsen als Modell zur Verfügung.

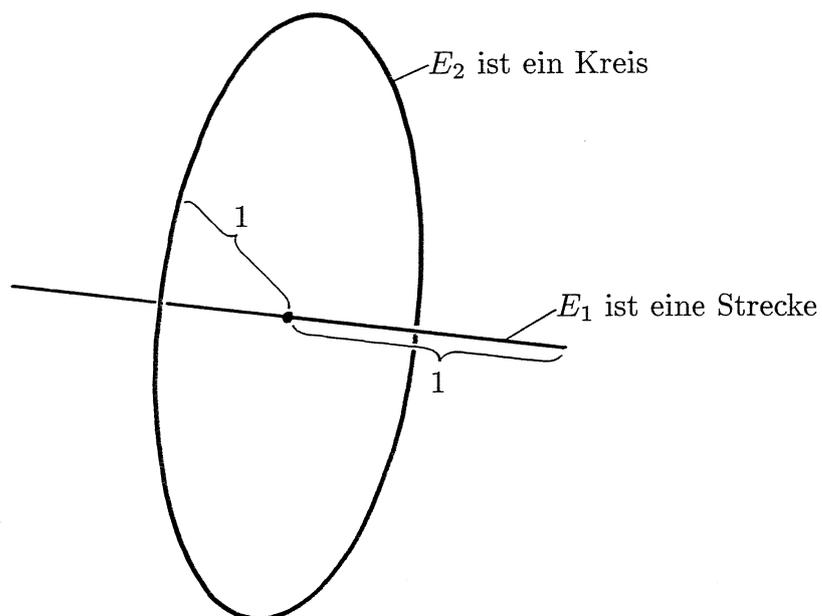
Betrachtet man $((\cos 2\gamma, 0, \sin 2\gamma), (\cos 2\gamma, 0, -\sin 2\gamma)) \in S^2 \times S^2$ und dessen Bilder in $\mathbb{C}P^2$ und Σ^4 , so erhält man einfache Beschreibungen der Äquivalenzrelationen mit Hilfe der noch zur Verfügung stehenden Linksoperation von $SO(3)$ auf $J \times SO(3)$: (γ, A) und (δ, B) sind genau dann äquivalent, wenn $\gamma = \delta$ und AB^{-1} in der folgenden, von γ abhängigen Untergruppe liegt:

	$\gamma = 0$	$0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$	$\gamma = \frac{\pi}{4}$
$\underset{1}{\sim}$	{id}	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & SO(2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} SO(2) & \\ & 1 \end{pmatrix}$
$\underset{2}{\sim}$	{id, }	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & SO(2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} O(2) & \\ & \det^{-1} \end{pmatrix}$
$\underset{3}{\sim}$	Diagonalmatrizen	$\begin{pmatrix} \det^{-1} & \\ & O(2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} O(2) & \\ & \det^{-1} \end{pmatrix}$

$\{\gamma = 0\}$ ist offenbar der Verzweigungsort von f und $\{\gamma = \frac{\pi}{4}\}$ der Verzweigungsort von g , weil jeweils nur dort die Äquivalenz gleich stark bleibt. Diese etwas abstrakte, aber einheitliche Beschreibung zeigt die enge Verwandtschaft zwischen f und g .

Zum Schluß sei bemerkt, daß die Antipodenabbildung von Σ^4 die Involution $J \rightarrow J$, $\gamma \mapsto \frac{\pi}{4} - \gamma$, induziert. Über ihr liegt auf $S^2 \times S^2$ -Niveau die Nebenklasse $H_1 \setminus D_4$ (vgl. 3.1), während es auf CP^2 -Niveau keine solche Symmetrie geben kann, da die reellen Punkte $\mathbb{R}P^2$ sind, die imaginären aber eine S^2 bilden. Zwei Ellipsen E_1 und E_2 des Ellipsenmodells von Σ^4 repräsentieren genau dann antipodische Punkte, wenn ihre großen Halbachsen aufeinander senkrecht stehen, ihre kleinen Halbachsen parallel zueinander sind und die Quadrate der Längen der kleinen Halbachsen sich zu 1 summieren.



Zeichnungen 22–24: Antipoden im Ellipsenmodell von Σ^4

KAPITEL IV

DIE HOMÖOMORPHIE VON $T \backslash \mathrm{SU}(3) / T$ ZU S^4

§1 $T \backslash G / T$ im allgemeinen

Der reelle Fall

Satz. Sei T ein maximaler Torus einer kompakten, zusammenhängenden Liegruppe G . Dann ist der Quotient $T \backslash G / T$ genau dann eine evtl. berandete, topologische Mannigfaltigkeit, wenn G für geeignete $k, l, m \geq 0$ lokal isomorph zu $U(1)^k \times \mathrm{SU}(2)^l \times \mathrm{SU}(3)^m$ ist. Der Quotient ist in diesem Falle homöomorph zu $I^l \times (S^4)^m$. 1.1

BEWEIS. Betrachte G als $T \times T$ -Mannigfaltigkeit via $((x, y), g) \mapsto xgy^{-1}$. Der Kern dieser Operation ist das diagonal in $T \times T$ eingebettete Zentrum von G . Aus der adjungierten Darstellung von G erhält man

$$\begin{aligned} \alpha: T/Z(G) \times \mathfrak{g}/\mathfrak{t} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{t} \\ (aZ(G), X + \mathfrak{t}) &\longmapsto T(a \cdot)T(\cdot a^{-1})X + \mathfrak{t} \end{aligned}$$

als einzigen Fuß des Scheibendiagramms; das zugehörige Stratum ist $\mathrm{Nor}_G T$.

Je zwei maximale Tori sind konjugiert, und ihre Konjugation induziert einen Homöomorphismus der Quotienten. Bei einer Überlagerung oder einem Produkt reicht daher die Betrachtung je eines geeigneten maximalen Torus.

Ist $\tilde{G} \xrightarrow{p} G$ eine Überlagerung durch eine kompakte, zusammenhängende Gruppe \tilde{G} , so ist $p^{-1}(T)$ ein maximaler Torus von \tilde{G} und $p^{-1}(T) \backslash \tilde{G} / p^{-1}(T) \rightarrow T \backslash G / T$ ein Homöomorphismus. Deshalb kann G als Produkt einfacher, einfach zusammenhängender Gruppen und eines Torus angenommen werden.

Sind $T_1 < G_1$ und $T_2 < G_2$ maximale Tori, so auch $T_1 \times T_2 < G_1 \times G_2$, und $T_1 \times T_2 \backslash G_1 \times G_2 / T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \backslash G_1 / T_1 \times T_2 \backslash G_2 / T_2$ ist ein Homöomorphismus. Ist G selbst ein Torus, so ist $T \backslash G / T$ ein Punkt. G kann daher als einfach und einfach zusammenhängend angenommen werden.

Ist G einfach, so ist das Wurzelsystem von G irreduzibel, und genau dann ist die Scheibendarstellung α prim. Nach Korollar II 5.12 ist $T \setminus G / T$ genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn $1 \geq \mathrm{codim} \alpha = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} / \mathfrak{t} - \dim_{\mathbb{R}} T = \frac{\dim G - \mathrm{rk} G}{2} - \mathrm{rk} G$, d. h. wenn $\dim G - 3 \mathrm{rk} G \leq 2$ gilt. Ich verwende nun die Klassifikation:

Typ	Vertreter	Dimension	$\dim G - 3 \mathrm{rk} G$
$A_n, n \geq 1$	$\mathrm{SU}(n+1)$	$n^2 + 2n$	$n(n-1)$
$B_n, n \geq 2$	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$(2n+1)n$	$2n(n-1)$
$C_n, n \geq 3$	$\mathrm{Sp}(n)$	$2n^2 + n$	$2n(n-1)$
$D_n, n \geq 4$	$\mathrm{Spin}(2n)$	$n(2n-1)$	$2n(n-2)$
E_6	$\mathrm{Aut}((\mathbb{O}P^2)_{\mathbb{C}})$	78	60
E_7		133	112
E_8		248	224
F_4	$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}P^2)$	52	30
G_2	$\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$	14	8

Die fragliche Ungleichung erfüllen nur A_1 und A_2 .

Nach III 3.8 ist $T \setminus \mathrm{SU}(2) / T \approx S^2 / T \approx I$, denn T operiert auf S^2 durch Drehungen um eine feste Achse. Schließlich ist $T \setminus \mathrm{SU}(3) / T \approx S^4$ laut Satz 3.7. \square

Ohne die Forderung des Zusammenhangs ist $T \setminus G / T$ die topologische Summe von $\#\pi_0(G)$ Kopien von $T \setminus G_0 / T$, wobei G_0 die Einskomponente von G bezeichnet.

Der komplexe Fall

Als komplexes Analogon zu $T \setminus G / T$ kann die Bruhatzerlegung aufgefaßt werden: Sei G eine halbeinfache komplexe Liegruppe. Wähle einen maximalen Torus $T \cong (\mathbb{C}^\times)^r$, bezeichne mit W die Weylgruppe $\mathrm{Nor}_G T / T$, wähle eine T umfassende Boreluntergruppe B und nenne die zu B gehörenden Wurzeln positiv.

Die Festlegung „ $v \leq w$ genau dann, wenn man v durch Streichen von Faktoren aus einer kürzesten Darstellung von w als Produkt von Spiegelungen an einfachen Wurzeln erhalten kann“ definiert auf W eine — mit der Gruppenstruktur nicht völlig verträgliche — Teilordnung, und die Festlegung $\forall w \in W: \mathrm{cl}(w) := \{v \in W \mid v \leq w\}$ definiert auf W eine Topologie. Bezüglich dieser ist

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & B \setminus G / B \\ nT & \longmapsto & BnB \end{array}$$

ein Homöomorphismus (siehe [Demazure]). Die Zerlegung in Orbits $G = \dot{\bigcup}_{nT \in W} BnB$ heißt die Bruhatzerlegung von G bezüglich B und T .

Der modulare Fall

1.2

Sei p prim. Nenne eine zu \mathbb{Z}_p^n isomorphe Gruppe Q einen p -primären Torus oder kurz p -Torus. Dies sind gerade die endlichen, abelschen Gruppen Q mit der Eigenschaft $\forall x \in Q: \text{ord } x | p$. Die größte Dimension als \mathbb{Z}_p -Vektorraum eines p -Torus in G heißt der p -Rang von G . Offensichtliche p -Tori sind $\{x \in T \mid \text{ord } x | p\}$, wenn T ein Torus ist, folglich ist der p -Rang von G mindestens gleich dem Rang von G . Ein Beispiel für echte Ungleichheit ist der 2-Rang von $O(n)$: Jeder maximale 2-Torus von $O(n)$ ist zu $O(1)^n$ konjugiert, daher ist $n = \text{rk}_2 O(n) > \text{rk } O(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ für $n > 0$.

Das Enthaltensein von p -Tori oder gar von kommutativen Untergruppen U von G , so daß U/U_0 ein p -Torus ist, in einem maximalen Torus steht laut [Borel] in engem Zusammenhang mit den Koeffizienten der Darstellung der höchsten Wurzel als Linearkombination der einfachen Wurzeln wie auch mit der p -Torsion in $\pi_1(G)$, $H^*(G, \mathbb{Z})$ und $H^*(BG, \mathbb{Z})$.

Die p -primären Situation ist in mancher Hinsicht komplizierter als die reelle: p -Tori liegen i. a. in keinem Torus, Urbilder von p -Tori bei Überlagerungen sind i. a. keine p -Tori, maximale p -Tori sind i. a. nicht zueinander konjugiert, und nicht alle maximalen p -Tori sind bekannt. Ob der Quotient $Q \setminus G / Q$ einer kompakten Liegruppe nach der beidseitigen Operation eines maximalen p -Torus eine Mannigfaltigkeit ist, beantworte ich deshalb nicht allgemein. In konkreten Fällen ist wiederum Satz II 5.11 das geeignet Hilfsmittel.

§2 Die Diffeomorphie von $Q \setminus \text{SO}(3) / Q$ zu S^3

WARNUNG. T steht in diesem und dem nächsten Paragraphen für einen bestimmten zweidimensionalen, maximalen Torus und T^2 für $T \times T$, analoges gilt für Q und Q^2 .

Beidseitige Operationen von Untergruppen

Für eine Untergruppe U einer Gruppe G nenne ich die Operation

$$\begin{aligned} (U \times U) \times G &\longrightarrow G \\ ((u, v), g) &\longmapsto u \cdot g \cdot v^{-1} \end{aligned}$$

von $U \times U$ auf G die beidseitige Operation von U auf G . Für $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ bezeichne P_σ die Permutationsmatrix $(\delta_{i, \sigma(j)})_{i,j}$ und \hat{P}_σ die Matrix $\text{sign}(\sigma)P_\sigma$. Fasse \mathfrak{S}_3 via $\hat{P}: \mathfrak{S}_3 \hookrightarrow \text{SO}(3)$ als Untergruppe von $\text{SO}(3)$ auf.

Es folgt eine Exposition der drei in diesem und dem nächsten Paragraphen behandelten beidseitigen Operationen des maximalen Torus auf $\text{SU}(3)$, des maximalen 2-primären Torus auf $\text{SO}(3)$ und der Quaternionengruppe auf $\text{Sp}(1)$.

2.1 DIE BEIDSEITIGE OPERATION VON T AUF $\text{SU}(3)$

Sei $G := \text{SU}(3)$ und $T < G$ der maximale Torus der Diagonalmatrizen. $\text{Nor}_G T$ ist via $x\hat{P}_\sigma \leftrightarrow (x, \sigma)$ zu $T \rtimes \mathfrak{S}_3$ isomorph; die Weylgruppe ist $\text{Nor}_G T / T \cong \mathfrak{S}_3$. Betrachte die Operation

$$\begin{aligned} \varrho : (T \times T) \times G &\longrightarrow G \\ ((x, y), A) &\longmapsto (x_i a_{ij} y_j^{-1})_{ij} \end{aligned}$$

von $T \times T$ auf G durch Linksmultiplikation und Rechtsmultiplikation nach Inversion. Aus der Beziehung $xAy^{-1} = A \Leftrightarrow (a_{ij} \neq 0 \Rightarrow x_i = y_j)$ ergeben sich die Standgruppen von ϱ und deren Fixpunkt Mengen als

Standgruppen	Fixpunkt Mengen	
$\{ (\hat{P}_\sigma x \hat{P}_\sigma^{-1}, x) \mid x \in T \}$	$\hat{P}_\sigma T$	(6 Stück)
$\{ (\hat{P}_\sigma \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \hat{P}_\sigma^{-1}, \hat{P}_\tau \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \hat{P}_\tau^{-1}) \mid \lambda \in \text{U}(1) \}$	$\hat{P}_\sigma \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(1)) \hat{P}_\tau^{-1}$	(9 Stück)
$Z(G)$	G ,	

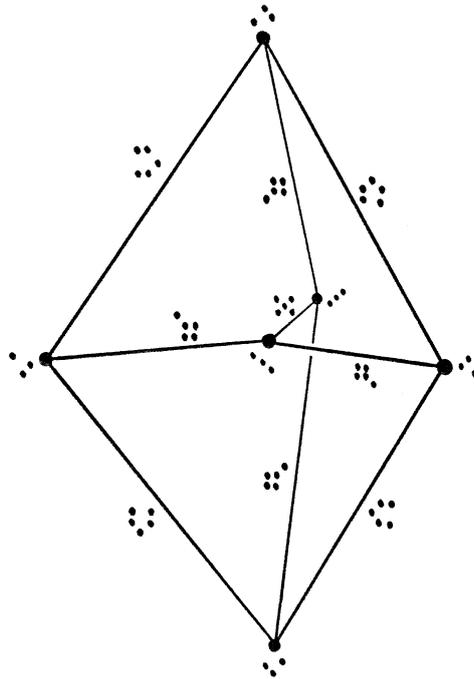
dabei durchlaufen σ und τ die Gruppe \mathfrak{S}_3 . Der Kern von ϱ ist das zu \mathbb{Z}_3 isomorphe Zentrum $Z(G)$ von G . Der Fuß des Scheibendiagramms ist laut dem Beweis des Satzes 1.1 der Scheibentyp der Darstellung

$$\begin{aligned} T \times \mathfrak{t}^\perp &\longrightarrow \mathfrak{t}^\perp, \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\bar{z}_3 & z_3 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & -\bar{z}_1 & z_1 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 z_3 x_2^{-1} & x_1 - \bar{z}_2 x_3^{-1} \\ -\bar{z}_3 x_2 x_1^{-1} & x_2 z_1 x_3^{-1} \\ x_3 z_2 x_1^{-1} & x_3 - \bar{z}_1 x_2^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also $\Delta(\varrho) = \{[\sigma_{(1,1,1)}], [\sigma_{(1,1)}], [\sigma_1]\}$ in der Notation von II 1.5. Entsprechend ist $G = G_{[\sigma_{(1,1,1)}]} \dot{\cup} G_{[\sigma_{(1,1)}]} \dot{\cup} G_{[\sigma_1]}$ die Scheibentypenstratifizierung der T^2 -Mannigfaltigkeit G . Das tiefste Stratum ist $G_{[\sigma_{(1,1,1)}]} = \text{Nor}_G T$. Die Fixpunkt Mengen sind die Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten der Strata.

In der durch $(\dot{\cdot}\dot{\cdot}) := \{ A \in G \mid a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = 2 \vee j = 3 \}$ exemplarisch definierten Notation lauten die Zusammenhangskomponenten des tiefsten Stratums $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$ und $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, die des mittleren Stratums $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$, $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$ und $(\dot{\cdot}\dot{\cdot})$. Das Hauptstratum hängt laut Satz I 1.3 zusammen und besteht aus den Matrizen mit höchstens einem verschwindenden Eintrag. Matrizen anderer Besetzung enthält G nicht, was aus der Tatsache, daß etwa auf einem Vektor der Form $\begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \neq 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ \neq 0 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen kann, wie auch aus der Bruhatzerlegung 3.2, leicht folgt. Die Besetzung einer Matrix bleibt unter der T^2 -Operation selbstverständlich erhalten.

Nenne $F_S := T \setminus (G \setminus \text{Hauptstratum}) / T$ das Gerüst von $T \setminus G / T$, wie es Zeichnung 25 zeigt. F_S kann als Graph aufgefaßt werden: Seine 6 Ecken bilden das tiefste, seine 9 offenen Kanten das mittlere Stratum von $T \setminus G / T$. Bemerke zum Beweis, daß die T^2 -Operation auf jeder der vierdimensionalen Fixpunkt Mengen zur beidseitigen Operation des maximalen Torus auf $U(2)$ isomorph ist. Daher ist z. B. $T \setminus (\cdot \cdot \cdot) / T \approx T_{U(2)} \setminus U(2) / T_{U(2)} = S^1 \setminus \text{SU}(2) / S^1 = [-1, 1]$, wobei $] - 1, 1[$ das Hauptstratum des Quotienten *dieser* Operation ist.



Zeichnung 25: Gerüst von $T \setminus \text{SU}(3) / T$ und $Q \setminus \text{SO}(3) / Q$

Setze $\mathcal{I} := \{\text{id}_G, (\bar{}), {}^t(), ()^{-1}\}$ und betrachte die Operation 2.3

$$\begin{aligned} \varrho: (G^2 \rtimes \mathcal{I}) \rtimes G &\longrightarrow G \\ (((a, b), c), g) &\longmapsto a g^c b^{-1} \end{aligned}$$

sowie ihre Einschränkungen auf $\mathcal{S} := \text{Nor}_{G^2 \rtimes \mathcal{I}} T^2$ und weiter auf T^2 . Dadurch wird G zu einer äquivarianten Mannigfaltigkeit mit Teilungsgruppe T^2 und Symmetriegruppe $(G^2 \rtimes \mathcal{I})$. Es gilt

$$\mathcal{S} = (\text{Nor}_G T)^2 \rtimes \mathcal{I} \cong (T \rtimes \mathfrak{S}_3)^2 \rtimes \mathcal{I}.$$

Motiviert wird die Operation ϱ dadurch, daß

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & Z(G) & \longrightarrow & G^2 \rtimes \mathcal{I} & \longrightarrow & \text{Isom}(G) \longrightarrow 1 \\ & & a & \longmapsto & ((a, a), \text{id}_G) & & \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz ist, wenn $\text{Isom}(G)$ die Isometrien bezüglich einer biinvari-

anten riemannschen Metrik bezeichnet. Der Beweis verläuft analog zu Lemma III 1.3. Der Quotient $\mathcal{S}/T^2 \cong (\mathfrak{S}_3^2 \rtimes {}^t(\)) \times (\bar{\ })$ operiert laut Lemma II 1.1 auf dem Orbitraum $T \setminus G/T$ effektiv.

2.4 DIE BEIDSEITIGE OPERATION VON Q AUF $\mathrm{SO}(3)$

Parallel zu 2.1 sei $G' := \mathrm{SO}(3)$, $Q := T \cap G' \subset G'$ der maximale 2-primäre Torus der Diagonalmatrizen und $\varrho': (Q \times Q) \times G' \rightarrow G'$ die Einschränkung von ϱ auf Normalisator und Fixpunktmenge von $(\bar{\ })$. Die obigen Aussagen gelten sinngemäß auch für ϱ' ; die Standgruppen, Fixpunktmenge, Strata und Scheibendarstellungen erhält man durch Schneiden der entsprechenden Objekte aus 2.1 mit G' : Der Normalisator $\mathcal{N}_Q := \mathrm{Nor}_{G'} Q$ ist isomorph zu $Q^2 \rtimes \mathfrak{S}_3$. Die Standgruppen sind isomorph zu Q , \mathbb{Z}_2 oder 1, ihre Fixpunktmenge zu Q , $\mathrm{O}(2)$ oder G' . Der Kern von ϱ' ist das Zentrum $Z(G') = 1$ von G' . Das Scheibendiagramm von ϱ' ist $\{[\varrho_{(1,1,1)}], [\varrho_{(1,1)}], [\varrho_1]\}$ in der Notation von II 1.5, das tiefste Stratum $G'_{[\varrho_{(1,1,1)}]} = \mathcal{N}_Q$. Bei den Aussagen über die Besetzung der Matrizen ist zu beachten, daß z. B. $(\cdot \cdot)$ jetzt aus 4 und $(\cdot \cdot \cdot)$ aus 8 Zusammenhangskomponenten besteht.

$G'^2 \rtimes {}^t(\) \cong (\mathrm{Isom} G')^{(\bar{\ })}/(\bar{\ })$ ist die Isometriegruppe von G' und $(Q \times \mathfrak{S}_3)^2 \rtimes {}^t(\)$ der Normalisator von Q^2 in $\mathrm{Isom} G'$. Dessen Quotient $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes {}^t(\)$ operiert effektiv auf dem Orbitraum $Q \setminus G'/Q$. Betrachte G' fortan als die äquivariante Mannigfaltigkeit mit Teilungsgruppe Q^2 und Symmetriegruppe $(Q \times \mathfrak{S}_3)^2 \rtimes {}^t(\)$.

Die Inklusion $G' \subset G$ induziert verschiedene Abbildungen auf Quotientenniveau: Die Injektivität von $G'/Q \rightarrow G/T$ ist leicht zu sehen, die von $Q \setminus G'/Q \rightarrow T \setminus G/T$ sagt Lemma 3.3 aus. $Q \setminus (G' \setminus \text{Hauptstratum})/Q \rightarrow T \setminus (G \setminus \text{Hauptstratum})/T$ ist sogar ein Homöomorphismus, d. h. die Gerüste (siehe Definition 2.2) sind gleich!

2.5 DIE BEIDSEITIGE OPERATION VON \tilde{Q} AUF $\mathrm{Sp}(1)$

Sei p die Überlagerung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(1) & \longrightarrow & G', \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \cdots \alpha^{-1} \end{array}$$

vgl. III 3.8. $\tilde{Q} := p^{-1}(Q)$ ist die Quaternionengruppe. Der Normalisator $\mathcal{N}_{\tilde{Q}} := \mathrm{Nor}_{\mathrm{Sp}(1)} \tilde{Q}$ wird erzeugt von den beiden Elementen $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{2\pi}{8} + i \sin \frac{2\pi}{8}$ der Ordnung 8 und $\frac{1+i+j+k}{2} = \cos \frac{2\pi}{6} + \frac{i+j+k}{|i+j+k|} \sin \frac{2\pi}{6}$ der Ordnung 6 und besitzt 48 Elemente: $1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{N}_{\tilde{Q}} \rightarrow \mathcal{N}_Q \rightarrow 1$ ist eine nicht spaltende, zentrale Erweiterung. Über ϱ' liegt die Einschränkung $\tilde{\varrho}'$ der Darstellung

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Q} \times \tilde{Q}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ ((q_1, q_2), r) & \longmapsto & q_1 r q_2^{-1} \end{array}$$

auf die Einheitssphäre $\mathrm{Sp}(1) \subset \mathbb{H}$. Die Standgruppen von $\tilde{\varrho}'$ und deren Fixpunktmen-

gen sind

Standgruppen	Fixpunkt mengen	
$\{(n x n^{-1}, x) \mid x \in \tilde{Q}\}$	$\{n, -n\}$	(24 Stück)
$\{(n x n^{-1}, m x m^{-1}) \mid x \in \{1, i, -1, -i\}\}$	$n S^1 m^{-1}$	(18 Stück)
$Z(\text{Sp}(1))$	$\text{Sp}(1),$	

dabei durchlaufen n und m den Normalisator $\mathcal{N}_{\tilde{Q}}$. Der Kern von $\tilde{\varrho}'$ ist das Zentrum $Z(\text{Sp}(1)) = \{\pm 1\}$ von $\text{Sp}(1)$. Die Scheibendiagramme von $\tilde{\varrho}'$ und ϱ' sind gleich.

Offenbar induziert die Überlagerung $\text{Sp}(1) \rightarrow G'$ Homöomorphismen $\tilde{Q} \setminus \text{Sp}(1) / \tilde{Q} \approx Q \setminus G' / Q$ und $\tilde{Q} \setminus (\text{Sp}(1) \setminus \text{Hauptstratum}) / \tilde{Q} \approx Q \setminus (G' \setminus \text{Hauptstratum}) / Q$ der Quotienten und ihrer Gerüste.

Die Isometriegruppe von $\text{Sp}(1)$ ist $(\text{Sp}(1) \times_{Z(\text{Sp}(1))} \text{Sp}(1)) \times (\)^{-1} = \text{O}(4)$. Betrachte deshalb $\text{Sp}(1)$ als die äquivariante Mannigfaltigkeit mit Teilungsgruppe \tilde{Q}^2 und Symmetriegruppe $\mathcal{G} := \mathcal{N}_{\tilde{Q}}^{-2} \times (\)^{-1}$. Alles folgende ist äquivariant bezüglich der angegebenen Symmetriegruppen und der Morphismen zwischen ihnen gemeint.

Triangulierung

Abgesehen von Korollar 2.8 handelt der Paragraph nun von $\tilde{\varrho}'$. Ziel ist zunächst die Angabe einer Triangulierung von $\text{Sp}(1)$, die eine Triangulierung des Quotienten $\tilde{Q} \setminus \text{Sp}(1) / \tilde{Q}$ induziert; die Quotientenabbildung wird dadurch simplizial.

K sei der folgendermaßen definierte dreidimensionale simpliziale Komplex: $K_0 := \mathcal{N}_{\tilde{Q}}$ sei die Menge der Ecken, $K_1 := \{\{q_0, q_1\} \mid \text{ord } \frac{q_0}{q_1} = 8 \text{ oder } \text{ord } \frac{q_0}{q_1} = 6\}$ die Menge der Kanten von K . d bezeichne den Abstand auf $\text{Sp}(1)$. Eine Kante $\{q_0, q_1\}$ heiÙe kurze Kante, wenn $\text{ord } \frac{q_0}{q_1} = 8$, d. h. $d(q_0, q_1) = \frac{2\pi}{8}$ ist; sie heiÙe lange Kante, wenn $\text{ord } \frac{q_0}{q_1} = 6$, d. h. $d(q_0, q_1) = \frac{2\pi}{6}$ gilt. Weiter gehören zu K genau die Dreiecke mit genau einer langen Kante und genau die Tetraeder mit genau zwei, und zwar gegenüberliegenden, langen Kanten.

$$|K| \underset{\text{simplizial}}{\cong} \partial(\text{conv}(K_0)) \xrightarrow{\approx} \text{Sp}(1),$$

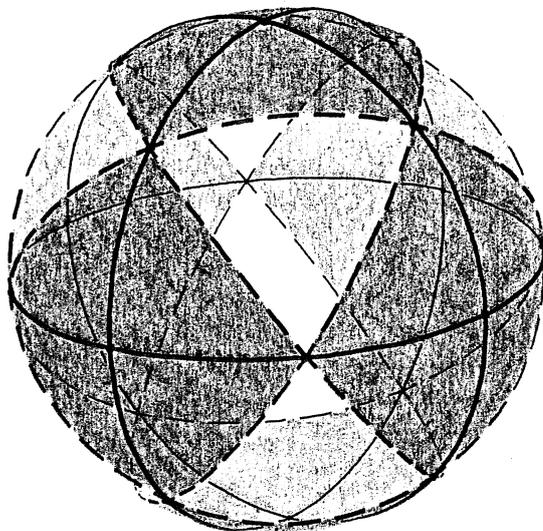
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

wobei ∂ den Rand und conv die konvexe Hülle bezeichne, ist eine Triangulierung äquivarianten Mannigfaltigkeit $\text{Sp}(1)$; sie bildet die Ecken auf das tiefste, die offenen kurzen Kanten auf das mittlere Scheibentypenstratum ab.

\mathcal{G} operiert simplizial auf K , dabei transitiv auf den Ecken, Dreiecken und Tetraedern, nur der Kanten gibt es zwei Klassen.

Ein Simplex $\{q_0, \dots, q_n\} \in K_n, 0 \leq n \leq 3$, erzeugt den n -dimensionalen sphärischen

Unterraum $\mathrm{span}\{q_0, \dots, q_n\} \cap \mathrm{Sp}(1)$, der die Fixpunktmenge einer geeigneten Untergruppe von \mathcal{G} ist. Diese Unterräume bestehen in Dimension 1 jeweils aus 8 kurzen oder 6 langen Kanten, in Dimension 2 jeweils aus 24 zu K gehörenden Dreiecken und 8 von lauter langen Kanten begrenzten Dreiecken.



Zeichnung 26: Von zweidimensionalem Simplex erzeugter sphärischer Unterraum

2.6 Zur Veranschaulichung von $\mathrm{Sp}(1)$ verwende ich das „Exponentialmodell“: Betrachte im Tangentialraum $T_1 \mathrm{Sp}(1)$ den abgeschlossenen Ball vom Radius π um den Ursprung. Schlage den Rand auf einen Punkt zusammen. Dann induziert die Exponentialabbildung $\exp_1: T_1 \mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{Sp}(1)$ einen Homöomorphismus (mit vielen guten metrischen und differenzierbaren Eigenschaften) des Modells auf $\mathrm{Sp}(1)$.

Zeichnung 27 zeigt alle Kanten von K , soweit sie durch ein bestimmtes Kugelvierundzwanzigstel laufen — Austrittspunkte sind ggf. durch kleine Kreuze gekennzeichnet — sowie alle in einem bestimmten Kugelachtel liegenden Ecken von K . Zeichnung 28 zeigt alle Kanten von K , soweit sie in diesem Achtel verlaufen.

QUOTIENTENBILDUNG UND EINBETTUNG

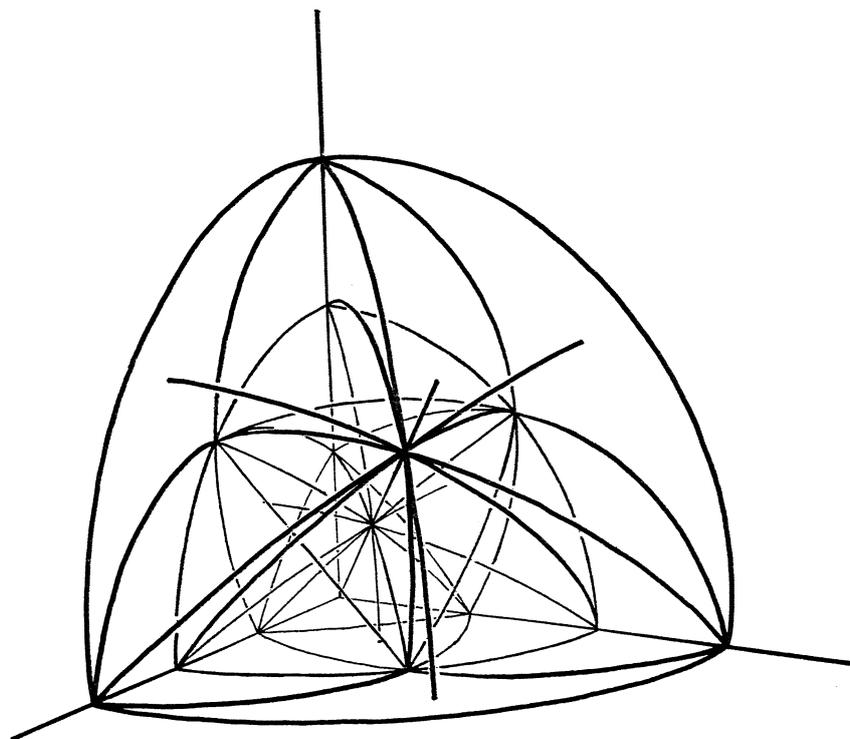
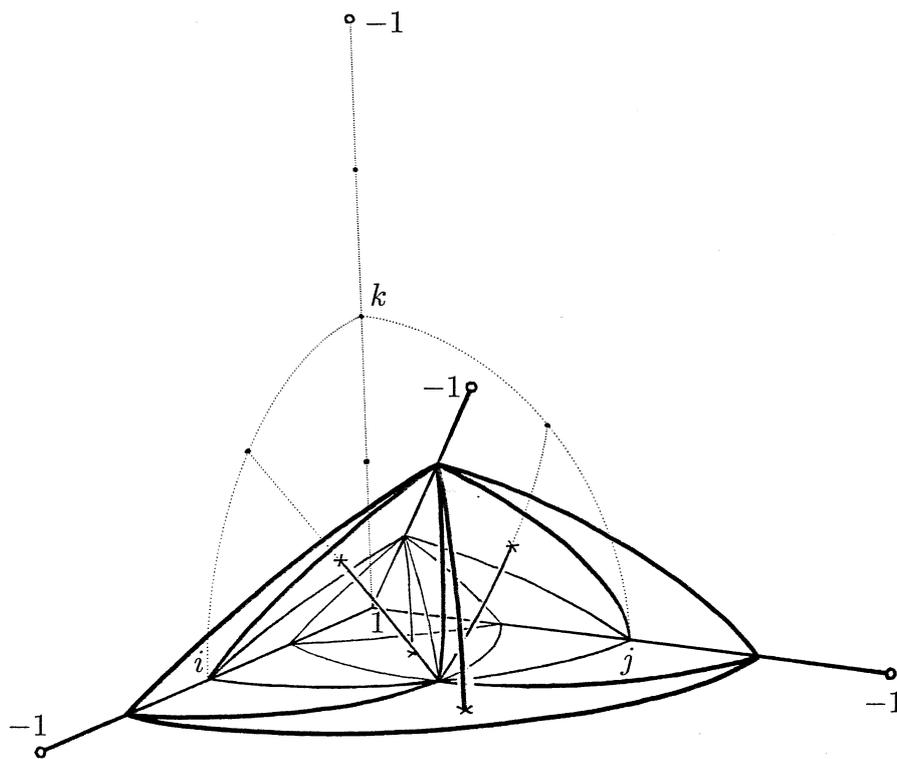
Sei für einen Augenblick K ein beliebiger simplizialer Komplex und \mathcal{G} eine Gruppe von Automorphismen von K . Dann ist auch $\mathcal{G} \setminus K$ ein simplizialer Komplex und

$$f: \mathcal{G} \setminus |K| \longrightarrow |\mathcal{G} \setminus K|$$

$$\mathcal{G} \sum_i t_i e_i \longmapsto \sum_i t_i \mathcal{G} e_i$$

eine Quotientenabbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist ein Homöomorphismus.
- (2) $K \rightarrow \mathcal{G} \setminus K$ erhält die Dimension der Simplizes.
- (3) Die Bilder unter $K_0 \rightarrow \mathcal{G} \setminus K_0$ der Ecken einer jeden Kante sind verschieden.

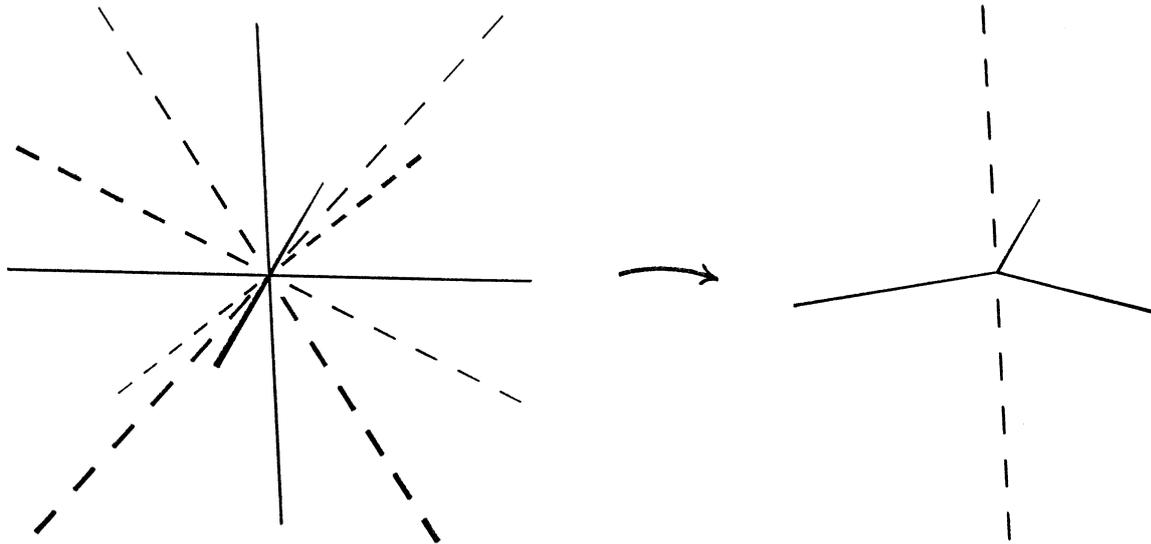


Zeichnungen 27 und 28: Die triangulierte $Sp(1)$ im Exponentialmodell

Im vorliegenden Fall ist $K_0 = \mathcal{N}_{\tilde{Q}} \longrightarrow \tilde{Q} \setminus K_0 / \tilde{Q} = \tilde{Q} \setminus \mathcal{N}_{\tilde{Q}}$ ein Homomorphismus von Gruppen und es gilt $x \in \tilde{Q} \Rightarrow \text{ord}(x) | 4 \Rightarrow \{q, xq\} \notin K_1$. Deshalb ist

$|\tilde{Q} \setminus K / \tilde{Q}| \longrightarrow \tilde{Q} \setminus \text{Sp}(1) / \tilde{Q}$ eine Triangulierung von $\tilde{Q} \setminus \text{Sp}(1) / \tilde{Q}$. Schreibe $\mathcal{H} := \mathcal{G} / \tilde{Q}^2$ und $L := \tilde{Q} \setminus K / \tilde{Q}$. Nenne die Bilder der kurzen resp. langen Kanten von K kurze resp. lange Kanten von L .

Das lokale Aussehen der Quotientenbildung zeigt Zeichnung 29. Zu sehen ist links eine Ecke von K mit den angrenzenden kurzen Kanten als durchgezogenen Linien und langen Kanten als gestrichelten Linien, rechts ihr Bild in L . Für eine Auffassung beider Hälften der Zeichnung als dreidimensionale Vektorräume siehe 3.1.



Zeichnung 29: Quotientenbildung lokal

Ziel ist nun die Einbettung des \mathcal{H} -Raumes $|L|$ in eine orthogonale Darstellung. Die Menge der Ecken von L ist $\tilde{Q} \setminus \mathcal{N}_{\tilde{Q}} = Q \setminus \mathcal{N}_Q = \mathfrak{S}_3$, die operierende Gruppe ist $\mathcal{H} = (\mathcal{N}_{\tilde{Q}}^2 \rtimes \mathbb{Z}_2) / \tilde{Q}^2 = \mathfrak{S}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$, und die Operation ist als

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathfrak{S}_3 &\longrightarrow \mathfrak{S}_3 \\ (((\sigma, \tau), \pm 1), \pi) &\longmapsto \sigma \pi^{\pm 1} \tau^{-1} \end{aligned}$$

gegeben.

Bezeichne die Transpositionen in \mathfrak{S}_3 mit \mathfrak{X}_3 . \mathcal{H} operiert effektiv auf \mathfrak{S}_3 , und zwar als die Gruppe derjenigen Bijektionen, die \mathfrak{A}_3 in sich oder in \mathfrak{X}_3 überführen, d. h.

$$\mathcal{H} = \text{Nor}_{\mathfrak{S}(\mathfrak{S}_3)}(\mathfrak{S}(\mathfrak{A}_3) \times \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_3)) \xrightarrow[\varphi]{\cong} \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

wobei φ mit Hilfe einer willkürlichen Bijektion $\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \mathfrak{A}_3$ und der kanonischen Bijektion $\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \mathfrak{X}_3$ definiert wird. φ ist der „einzige“ äußere Automorphismus von \mathcal{H} ; er läßt sich als Einschränkung des „einzigen“ äußeren Automorphismus von \mathfrak{S}_6 erhalten.

Wähle in dem affinen Raum

2.7

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid \forall i, j: \sum_i a_{ij} = 1, \sum_j a_{ij} = 1 \right\}$$

die Matrix $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ als Nullpunkt. \mathcal{H} operiere durch $((\sigma, \tau), c) A = P_\sigma {}^c A P_\tau^{-1}$ linear auf \mathcal{A} , das nichttriviale Element von $\mathbb{Z}_2 < \mathcal{H}$ wirke dabei als Transposition. Dann ist die Zuordnung der Permutationsmatrix $P: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathcal{A}$ eine äquivariante Einbettung, die ihrerseits eine simpliziale Einbettung $|L| \rightarrow \mathcal{A}$ bestimmt.

Diese Einbettung ist i. w. eindeutig: Zu jeder simplizialen Einbettung $f: |L| \rightarrow V$ in eine orthogonale Darstellung gibt es ein Monometrie $\mathcal{A} \hookrightarrow V$ und ein $r > 0$, so daß $\text{pr}_{\mathcal{A}} \circ f = r \cdot P$ gilt, wobei $\text{pr}_{\mathcal{A}}$ die orthogonale Projektion auf \mathcal{A} bezeichnet. Der von \mathfrak{S}_3 frei erzeugte Vektorraum zerfällt nämlich, aufgefaßt als \mathcal{H} -Modul, in drei isotypische, irreduzible Summanden: die vierdimensionale Darstellung \mathcal{A} , die eindimensionale $((\sigma, \tau), \pm 1)v \mapsto \pm v$ und die eindimensionale triviale. Davon ist aber nur die Darstellung \mathcal{A} treu.

$$\begin{array}{ccc} |L| & \cong & \partial(\text{conv}(P(\mathfrak{S}_3))) \\ \text{simplizial} & & x \\ & & \longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{array} \xrightarrow{\approx} S^3$$

ist eine Triangulierung der Sphäre in \mathcal{A} vom Radius $\|P_\pi\|$. Diese \mathcal{H} -Mannigfaltigkeit S^3 ist nicht mit der \mathcal{G} -Mannigfaltigkeit $\text{Sp}(1)$ zu verwechseln! \mathcal{H} operiert transitiv auf den Ecken, Dreiecken und Tetraedern von L , nur der Kanten gibt es zwei Klassen: Die sphärisch gemessene Länge der kurzen ist $\frac{2\pi}{4}$, die der langen $\frac{2\pi}{6}$. Der von einem 1-Simplex erzeugte sphärische Unterraum besteht aus einer kurzen Kante und einem nicht zu $|L_1|$ gehörenden Teil bzw. aus 3 langen Kanten. Der von einem 2-Simplex erzeugte sphärische Unterraum besteht aus 3 zu L gehörenden Dreiecken und einem von lauter langen Kanten begrenzten Dreieck von der Größe einer Halbsphäre.

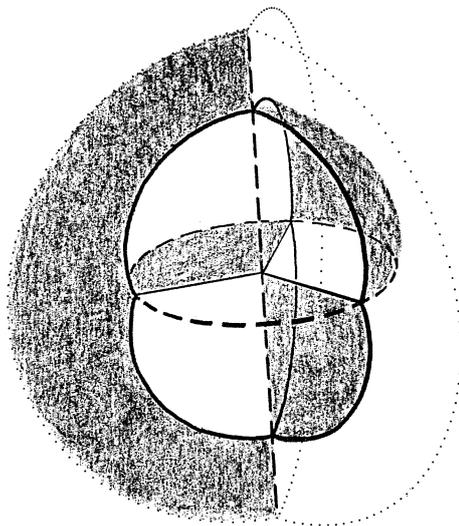
Kombinatorische Übersicht:

Triangulierung		Ecken	kurze Kanten	lange Kanten	Dreiecke	Tetraeder
K	Simplizes	48	144	192	576	288
	erzeugte Unterräume	48	18	32	(24)	1
L	Simplizes	6	9	6	18	9
	erzeugte Unterräume	6	(9)	2	(6)	1

Eingeklammert sind die Anzahlen derjenigen Unterräume, die nicht ganz im Gerüst der betreffenden Dimension enthalten sind.

Zur Veranschaulichung von S^3 verwende ich wieder das „Exponentialmodell“ 2.6.

Als Fußpunkt dient diesmal $E := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in S^3$. B sei der abgeschlossene Ball vom Radius π um den Ursprung von $T_E S^3$. Der Rand von B repräsentiert als Ganzes den Antipoden $A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ von E , die einzelnen Punkte des Randes repräsentieren die Ursprungsstrahlen in $T_A S^3$.



Zeichnung 30: Die triangulierte S^3 im Exponentialmodell

Zeichnung 30 zeigt B und darin die kurzen Kanten von L als durchgezogene Linien, die langen Kanten von L als gestrichelte Linien und vier der Dreiecke als graue Flächen. Die fehlenden Dreiecke von L ergeben sich durch Spiegelung an der horizontalen Ebene und $\frac{2\pi}{3}$ -Drehungen um die vertikale Achse. Drei der offenen Dreiecke berühren den Antipoden A . Deren Abschlüsse in B schneiden den Rand von B in den gepunkteten Linien.

Damit ist die gesamte Situation in die Sprache der simplizialen Komplexe und Abbildungen übersetzt, gleichzeitig die topologische Gestalt des Quotienten erkannt:

Proposition. Der Gruppenhomomorphismus $K_0 = \mathcal{N}_{\tilde{Q}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{Q}}/\tilde{Q} = L_0$ definiert die simpliziale Abbildung $K \longrightarrow \tilde{Q} \setminus K / \tilde{Q}$, deren geometrische Realisierung

$$|K| \longrightarrow \tilde{Q} \setminus |K| / \tilde{Q} \approx |\tilde{Q} \setminus K / \tilde{Q}|$$

durch die angegebenen Triangulierungen in

$$\mathrm{Sp}(1) \longrightarrow \tilde{Q} \setminus \mathrm{Sp}(1) / \tilde{Q} \approx S^3$$

übergeht. Dies geschieht äquivariant über $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\tilde{Q}^2$, wobei \mathcal{G} und \mathcal{G}/\tilde{Q}^2 auf $\mathrm{Sp}(1)$

bzw. S^3 orthogonal operieren.

Verschiedene Identifikationen vernachlässigend ist das in 2.2 definierte Gerüst F_S der aus den Ecken, i. e. das tiefste Stratum, und den offenen kurzen Kanten, i. e. das mittlere Stratum, bestehende Unterkomplex von L . Seine Lage in S^3 ist der Zeichnung Nr. 30 zu entnehmen.

Differenzierbarkeit

Die äquivariante Mannigfaltigkeit $\tilde{Q}^2 \triangleleft \mathcal{G} \rightarrow \text{Diffeo}(\text{Sp}(1))$ ist gemäß Satz I 7.7 Teil einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} \text{Sp}(1) & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta^{\text{ab}}|_{\cdot} & \chi|_{\cdot} & \nu|_{\cdot} \end{pmatrix}$, wobei χ und ν gemäß Proposition II 5.8 aus einer Ts-Auswahl φ und einer Glättung g gewonnen sind.

Proposition. $(\tilde{Q} \setminus \text{Sp}(1) / \tilde{Q}, \mathcal{D})$ ist äquivariant diffeomorph zu $(S^3, \mathcal{E}^{\text{Standard}})$ mit obiger orthogonaler \mathcal{H} -Operation.

BEWEISSKIZZE. Die Triangulierung $|K| \rightarrow \text{Sp}(1)$ bestimmt eine Verfeinerung der Scheibentypenstratifizierung von $\text{Sp}(1)$, indem man die Ecken, die offenen kurzen Kanten, die offenen langen Kanten, die offenen Dreiecke und die offenen Tetraeder zu je einem Stratum vereinigt. Konstruiere eine auf der Ts-Auswahl φ basierende Familie von Tuben zu der durch die Triangulierung $|L| \rightarrow S^3$ bestimmten Stratifizierung von S^3 .

Es genügt nun, einen Homöomorphismus $f: \text{Sp}(1) \rightarrow S^3$ anzugeben, der die Strata differenzierbar submersiv aufeinander abbildet, die Tubensysteme ineinander überführt und auf den Fasern der Tuben durch die Linearisierung gegeben ist. Aufgrund der Äquivarianz braucht f nur auf einem einzigen (abgeschlossenen) Tetraeder konstruiert zu werden. Dies kann aber durch eine leichte Abwandlung — die Tetraeder hier sind anders als dort nicht völlig symmetrisch — von Kapitel II §4 geschehen. \square

Diese Proposition impliziert wegen I 5.9 das

Korollar. Die Darstellung $\tilde{Q}^2 \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, ((q_1, q_2), r) \mapsto q_1 r q_2^{-1}$ ist linearisierbar. 2.8

Dies ist die komplizierteste Darstellung einer nichtabelschen Gruppe, die in dieser Arbeit als linearisierbar erwiesen wird; ihr Scheibendiagramm hat Länge 4. Schließlich gilt für die Operation ϱ' aus 2.5 das

Korollar. Die Mf-Matrix $\begin{pmatrix} \text{Sp}(1) & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta^{\text{ab}}|_{\cdot} & \chi|_{\cdot} & \nu|_{\cdot} \end{pmatrix}$ bestimmt in natürlicher Weise eine 2.9
Mf-Matrix $\begin{pmatrix} \text{SO}(3) & \psi' & \mathcal{D}' \\ \Delta^{\text{ab}}|_{\cdot} & \chi|_{\cdot} & \nu|_{\cdot} \end{pmatrix}$. Der Quotient $(Q \setminus \text{SO}(3) / Q, \mathcal{D}')$ ist äquivariant diffeomorph zu $(S^3, \mathcal{E}^{\text{Standard}})$ mit obiger orthogonaler \mathcal{H} -Operation.

BEWEIS. $\{((\pm 1, \pm 1), 1)\} \cong \mathbb{Z}_2^2$ liegt normal in \tilde{Q}^2 und operiert homogen auf $\text{Sp}(1)$, darf daher gemäß Korollar I 7.9 bei $\tilde{\varrho}'$ vorab herausgeteilt werden. Wegen $\mathbb{Z}_2^2 \setminus \text{Sp}(1) = \text{SO}(3)$ und $\tilde{Q}^2 / \mathbb{Z}_2^2 = Q^2$ entsteht dabei gerade ϱ' . \square

In der Folge $\text{Sp}(1) = S^3 \xrightarrow{2:1} \text{SO}(3) = \mathbb{R}P^3 \xrightarrow{4:1} \text{SO}(3)/Q \xrightarrow{4:1} S^3$ von Überlagerungen ist nur die letzte entlang der kurzen Kanten (2:1) und der Ecken (1:1) verzweigt. Auch ist die letzte nicht differenzierbar. Wohl aber sind alle bezüglich der gewählten Triangulierungen simplizial.

§ 3 Die Homöomorphie von $T \setminus \text{SU}(3) / T$ zu S^4

Die Bezeichnungen des vorangehenden Paragraphen werden fortgeführt. In 2.3 und 2.4 waren die äquivariante Mannigfaltigkeit $G = \text{SU}(3)$ mit Teilungsgruppe $T \times T$ und Symmetriegruppe S sowie die invariante Untermannigfaltigkeit $G' = \text{SO}(3)$ eingeführt worden. Die S -Äquivarianz gilt in den Abschnitten „Bruhatzerlegung“ und „Topologische Gestalt der Quotienten“ wegen der Wahl einer Boreluntergruppe bzw. der Auszeichnung der ersten Spalten der Matrizen nur bedingt.

Lokale Situation

3.1 An die lokale Situation soll kurz erinnert werden, vgl. 2.1, 2.4 und II 5.5: Der Hauptscheibentyp der $T \times T$ -Mannigfaltigkeit G ist $\sigma_{(1,1,1)}$, derjenige der $Q \times Q$ -Mannigfaltigkeit G' ist $\tau_{(1,1,1)}$.

$$\begin{array}{ccc}
 Q & \times & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\tau_{(1,1,1)}} & \mathbb{R}^3 \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 T & \times & \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\sigma_{(1,1,1)}} & \mathbb{C}^3, & \text{beachte } \prod_k x_k = 1. \\
 \left(\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \\ x_3 z_3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Das tiefste Stratum ist jeweils der Ursprung, das mittlere Stratum ist die Vereinigung der reellen bzw. komplexen Koordinatenachsen ohne den Ursprung, alles übrige ist das Hauptstratum. Unter Verwendung der Beträge und des verbleibenden „Winkels“ als Invarianten erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q \setminus (\mathbb{R}^3 \setminus \text{Hauptstratum}) & \subset & Q \setminus \mathbb{R}^3 & \approx & \{(w, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid |w| = v_1 v_2 v_3\} & \approx & \mathbb{R}^3 \\
 \parallel & & \downarrow & & \cap & & \cap \\
 T \setminus (\mathbb{C}^3 \setminus \text{Hauptstratum}) & \subset & T \setminus \mathbb{C}^3 & \approx & \{(w, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid |w| = v_1 v_2 v_3\} & \approx & \mathbb{R}^4. \\
 & & Tz & \longmapsto & (z_1 z_2 z_3, \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| \\ |z_3| \end{pmatrix}) & &
 \end{array}$$

Tz liegt genau dann in $Q \setminus \mathbb{R}^3$, wenn $z_1 z_2 z_3$ reell ist. Die Quotientenbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow Q \setminus \mathbb{R}^3$

zeigt Zeichnung 29. $Q \setminus \mathbb{R}^3$ ist im rechten Teil dieser Zeichnung linearisiert dargestellt. Denkt man sich eine Dimension hinzu, so erhält man $T \setminus \mathbb{C}^3$.

Bruhatzerlegung

3.2

Für $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ bezeichne \widehat{P}_σ weiterhin die mit dem Signum versehene Permutationsmatrix von σ . In Anlehnung an die Permutationsmatrix verwende ich für die Elemente von \mathfrak{S}_3 folgende Symbole:

Symbol	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \blacksquare & & & & & \\ & \blacksquare & & & & \\ & & \blacksquare & & & \\ & & & \blacksquare & & \\ & & & & \blacksquare & \\ & & & & & \blacksquare \end{smallmatrix}$
Zykelschreibweise	()	(123)	(321)	(23)	(31)	(12)

$\text{SL}(3, \mathbb{C})$ ist „die“ Komplexifizierung von $\text{SU}(3)$ und die Menge L der oberen Dreiecksmatrizen eine Boreluntergruppe. Setze $B_\sigma := L\widehat{P}_\sigma L \cap G$ für $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. Um für die Bruhatzellen B_σ/T globale Karten angeben zu können, betrachte ich zunächst einige Abbildungen: Kompaktifiziere \mathbb{C} durch $\mathbb{C} \hookrightarrow D^2$, $\zeta \mapsto z := (1 + |\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}\zeta$, und setze $\hat{z} := (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}} \in I$. Für $|z| < 1$ ist $\hat{z} = \frac{z}{\zeta}$. Gleiches möge für ξ, x, \hat{x} und η, y, \hat{y} gelten. Das Kompositum von

$$\begin{array}{ccc}
 D^2 & \hookrightarrow & \text{SU}(2) \\
 z & \longmapsto & \begin{pmatrix} z & -\hat{z} \\ \hat{z} & \bar{z} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \text{SU}(2) \twoheadrightarrow \text{SU}(2)/S^1 \approx S^2$$

ist surjektiv, auf $\text{int}(D^2)$ zudem injektiv und bildet ∂D^2 auf $\{S^1\}$ ab. Die Surjektion

$$\begin{array}{ccc}
 (1 \times \text{SU}(2)) \times (\text{SU}(2) \times 1) \times (1 \times \text{SU}(2)) & \twoheadrightarrow & G \\
 (X \quad , \quad Y \quad , \quad Z) & \longmapsto & XYZ
 \end{array}$$

ist das komplexe Analogon zu den Eulerwinkeln

$$(1 \times \text{SO}(2)) \times (\text{SO}(2) \times 1) \times (1 \times \text{SO}(2)) \twoheadrightarrow G'.$$

Ihre Verwendung wird durch [Hansen] nahegelegt. Sei ab jetzt

$$X := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x & -\hat{x} \\ & \hat{x} & \bar{x} \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} y & -\hat{y} & \\ \hat{y} & \bar{y} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } Z := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & z & -\hat{z} \\ & \hat{z} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ist

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\beta_\sigma} & B_\sigma/T \\
 \downarrow & & \cap \\
 (D^2)^3 & \hookrightarrow (1 \times \text{SU}(2)) \times (\text{SU}(2) \times 1) \times (1 \times \text{SU}(2)) \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow G/T,
 \end{array}$$

$$\text{d. h. } \beta_{\bullet}(\xi, \eta, \zeta) = XYZT = \begin{pmatrix} y & -\hat{y}z & \hat{y}\hat{z} \\ x\hat{y} & x\bar{y}z - \hat{x}\hat{z} & -x\bar{y}\hat{z} - \hat{x}\bar{z} \\ \hat{x}\hat{y} & \hat{x}\bar{y}z + \bar{x}\hat{z} & -\hat{x}\bar{y}\hat{z} + \bar{x}\bar{z} \end{pmatrix} T,$$

ein Diffeomorphismus auf die höchste Bruhatzelle. Die linksseitige T -Operation auf B_{\bullet}/T geht dabei in die unitäre Darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \bar{\lambda}_3 \xi \\ \bar{\lambda}_3 \lambda_1 \eta \\ \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \zeta \end{pmatrix}$$

über. Da T von rechts frei auf G operiert und B_{\bullet}/T in G/T offen ist, ist diese Darstellung der Fuß des Scheibendiagramms der $T \times T$ -Mannigfaltigkeit G . Nach 3.1 gilt daher $T \setminus B_{\bullet}/T \approx \mathbb{R}^4$. Durch Verzicht auf Faktoren ergeben sich auch für die niederen Bruhatzellen äquivariante Diffeomorphismen zu unitären T -Moduln:

$$\begin{array}{ccc} \beta_{\bullet} : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & B_{\bullet}/T, & \beta_{\bullet} : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & B_{\bullet}/T, & \beta_{\bullet} : \mathbb{C}^1 & \longrightarrow & B_{\bullet}/T, \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & XY \cdot T & (\eta, \zeta) & \longmapsto & YZ \cdot T & \xi & \longmapsto & X \cdot T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \beta_{\bullet} : \mathbb{C}^1 & \longrightarrow & B_{\bullet}/T & \text{und} & \beta_{\bullet} : \mathbb{C}^0 & \longrightarrow & B_{\bullet}/T. \\ \eta & \longmapsto & Y \cdot T & & 0 & \longmapsto & T \end{array}$$

Hier sind die Darstellungen zu $T \subset \text{U}(2)$, zu $S^1 \subset \text{U}(1)$ bzw. zu $1 \subset \text{U}(0)$ äquivalent, die Quotienten mithin zu $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$, zu $\mathbb{R}_{\geq 0}^1$ bzw. zu $\mathbb{R}_{\geq 0}^0$ homöomorph. Die Bilder der Kompaktifizierungen $(D^2)^n$ unter der Fortsetzung der β_{σ} sind die Abschlüsse der jeweiligen Zellen. Welcher Zelle eine Matrix aus G angehört, läßt sich bereits an ihrer Besetzung erkennen, z. B. ist

$$B_{\bullet} = \left\{ \begin{pmatrix} & \neq 0 \\ \neq 0 & \end{pmatrix} \right\}, \quad B_{\bullet} = \left\{ \begin{pmatrix} & \neq 0 \\ \neq 0 & \neq 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B_{\bullet} = \left\{ \begin{pmatrix} \neq 0 & 0 \\ \neq 0 & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Abschlüsse erhält man durch Verzicht auf die Bedingungen der Form $a_{ij} \neq 0$. Speziell ergibt sich eine überraschende Beschreibung der Menge der Matrizen, bei denen ein bestimmter Eintrag, etwa a_{31} , verschwindet:

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & = & (\text{SU}(2) \times 1) \times (1 \times \text{SU}(2)) & \longleftrightarrow & \text{cl}(B_{\bullet}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix} \right\} \\ & & (X & , & Y) & \longmapsto & XY \end{array}$$

Entsprechende Aussagen gelten für $B'_{\sigma} := B_{\sigma} \cap G'$, z. B. ergeben sich durch Einschränkung der β_{σ} auf $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ Q -äquivariante Diffeomorphismen zu den B'_{σ}/Q , und die Menge der Matrizen mit — etwa — $a_{31} = 0$ läßt sich durch

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & = & (\text{SO}(2) \times 1) \times (1 \times \text{SO}(2)) & \longleftrightarrow & \text{cl}(B'_{\bullet}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix} \right\} \\ & & (X & , & Y) & \longmapsto & XY \end{array}$$

beschreiben.

Lemma. Die Inklusion $G' \subset G$ führt zu einer Einbettung $Q \setminus G' / Q \hookrightarrow T \setminus G / T$ der Quotienten ineinander und einem Homöomorphismus **3.3**

$$Q \setminus (G' \setminus B'_{\sigma}) / Q \approx T \setminus (G \setminus B_{\sigma}) / T =: F_B$$

der aus den Quotienten der niederen Bruhatzellen gebildeten Gerüste.

BEWEIS.

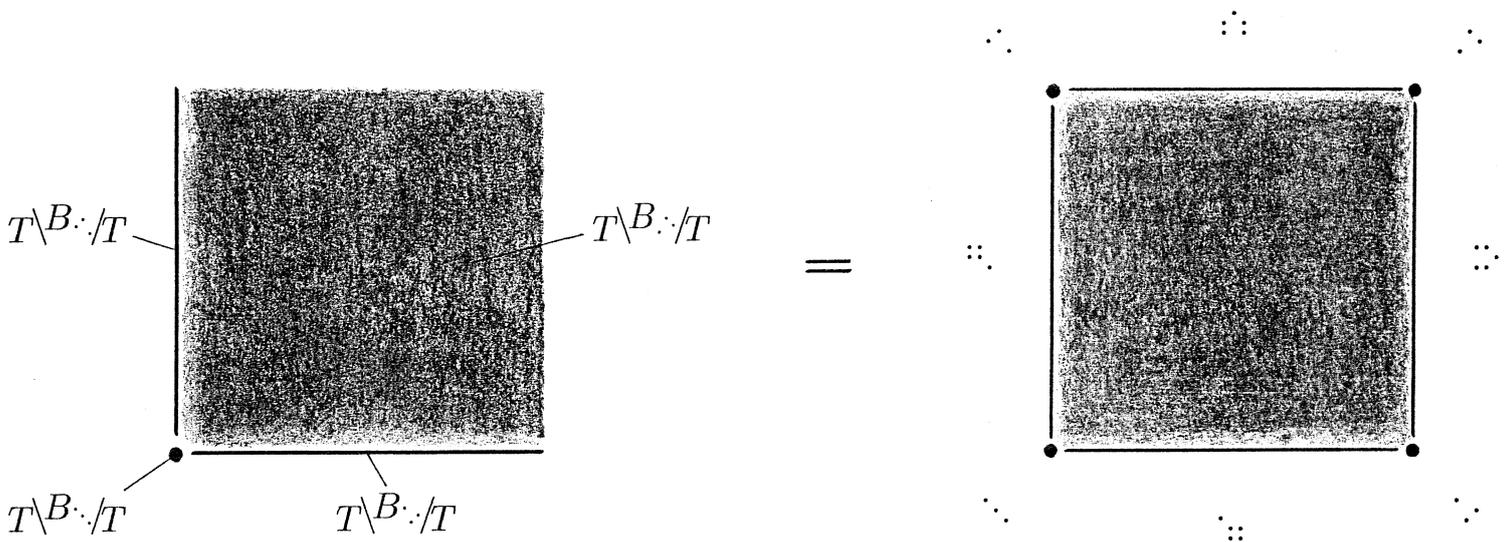
$$\begin{array}{ccc} B'_{\sigma} / Q & \subset & B_{\sigma} / T \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \beta_{\sigma} \\ \mathbb{R}^n & \subset & \mathbb{C}^n \end{array} \quad \text{induziert} \quad \begin{array}{ccc} Q \setminus B'_{\sigma} / Q & \longrightarrow & T \setminus B_{\sigma} / T \\ \cong & & \cong \\ Q \setminus \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T \setminus \mathbb{C}^n, \end{array}$$

dessen untere Zeile ist aber nach 3.1 eine Einbettung, für $\sigma \neq \bullet$ sogar ein Homöomorphismus. \square

Zwischen der Bruhatzerlegung und der Scheibentypenstratifizierung bestehen enge Beziehungen: β_{\bullet} induziert den Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \longrightarrow & \text{cl}(T \setminus B_{\bullet} / T) \\ (\hat{x}, \hat{y}) & \longmapsto & T \cdot XY \cdot T \end{array}$$

$\text{cl}(T \setminus B_{\bullet} / T)$ besteht aus vier Bruhatzellen, sein Rand aus je vier Zusammenhangskomponenten des tiefsten und des mittleren Scheibentypenstratums, wie Zeichnung 31 andeutet. Für die andere zweithöchste Bruhatzelle B_{\bullet} gilt analoges.



Zeichnung 31: In $\text{cl}(T \setminus B_{\bullet} / T)$ enthaltene Bruhatzellen bzw. Scheibentypenstrata

Die Abbildung i

Erinnert sei an die Symmetriegruppe \mathcal{S} aus 2.3 und die Gruppe der „äußeren“ Isometrien $\mathcal{I} := \{\mathrm{id}, {}^t(\), (\bar{\ })^{-1}\}$. Definiere den Homomorphismus $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ durch die Gleichung $\varepsilon((x, \sigma), (y, \tau), c) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\varepsilon(c)$, wobei $\varepsilon: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ durch die Forderung $\ker \varepsilon = \{\mathrm{id}, {}^t(\)\}$ definiert ist, und $\varepsilon: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ das Signum bezeichnet. Als Invariante benötige ich den Imaginärteil der „geraden“ Summanden der Determinante

$$\begin{aligned} i: G &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ A &\longmapsto \mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=1} \prod_k a_{k, \pi k} \end{aligned}$$

3.4 Lemma.

- (1) i ist ε -äquivariant, faktorisiert daher insbesondere über $T \setminus G / T$.
- (2) Das Urbild von $\{0\}$ unter i ist die Menge $TG'T$.
- (3) $T \setminus G / T \longrightarrow T^2 \times (\bar{\ }) \setminus G$ ist eine entlang $Q \setminus G' / Q$ verzweigte, zweiblättrige Überlagerung.

BEWEIS. Zu (1): Für $A \in G$ ist $\det A = 1$, folglich

$$\mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=1} \prod_k a_{k, \pi k} = \mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=-1} \prod_k a_{k, \pi k},$$

folglich

$$\begin{aligned} i(((x, \sigma), (y, \tau), c) A) &= i(x \hat{P}_\sigma A^c \hat{P}_\tau^{-1} y^{-1}) \\ &= i((x_i \varepsilon(\sigma) A^c_{\sigma^{-1}i, \tau^{-1}j} \varepsilon(\tau^{-1}) y_j^{-1})_{i,j}) \\ &= \mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=1} \prod_k x_k \varepsilon(\sigma) A^c_{\sigma^{-1}k, \tau^{-1}\pi k} \varepsilon(\tau^{-1}) y_{\pi k}^{-1} \\ &= \varepsilon(\sigma\tau) \mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=1} \prod_k A^c_{\sigma^{-1}k, \tau^{-1}\pi k} \\ &= \varepsilon(\sigma\tau) \mathrm{Im} \sum_{\varepsilon(\pi)=\varepsilon(\sigma\tau)} \prod_k A^c_{k, \pi k} \\ &= \varepsilon(\sigma\tau) i(A^c) \\ &= \varepsilon(\sigma\tau)\varepsilon(c) i(A). \end{aligned}$$

Zu (2): Angesichts von (1), Lemma 3.3 und $i(G') = 0$ genügt es zu bemerken:

$$\begin{aligned} 0 &= i(\beta_{\cdot\cdot}(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= \mathrm{Im} (y(x\bar{y}z - \hat{x}\hat{z})(-\hat{x}\bar{y}\hat{z} + \bar{x}\bar{z}) + x\hat{y}(\hat{x}\bar{y}z + \bar{x}\hat{z})\hat{y}\hat{z} + \hat{x}\hat{y}(-\hat{y}z)(-x\bar{y}\hat{z} - \hat{x}\bar{z})) \\ &= \mathrm{Im} (-\hat{x}x|y|^2\bar{y}\hat{z}z - \hat{x}\bar{x}y\hat{z}\bar{z} + 2\hat{x}x\hat{y}^2\bar{y}\hat{z}z) \\ &= 3\hat{x}\hat{y}^2\hat{z} \mathrm{Im}(x\bar{y}z) \\ &\Leftrightarrow x\bar{y}z \text{ ist reell} \\ &\Leftrightarrow [(w, y, z)] \in Q \setminus \mathbb{R}^3, \text{ siehe 3.1.} \end{aligned}$$

Zu (3): Teilen durch eine Involution ist immer eine entlang der Fixpunktmenge verzweigte zweiblättrige Überlagerung. Nun läßt sich $Q \setminus G' / Q$ nach Lemma 3.1 als Teilmenge von $T \setminus G / T$ auffassen und ist nach (2) die Fixpunktmenge der Involution $(\bar{}): T \setminus G / T \longrightarrow T \setminus G / T$. \square

Topologische Gestalt der Quotienten

Definiere die „Betragsabbildung“ $\mathfrak{b}: G \rightarrow S_{\geq 0}^2 \times S_{\geq 0}^2$ durch die Abbildungsvorschrift $A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}| & |a_{12}| \\ \hline |a_{21}| & |a_{22}| \\ |a_{31}| & |a_{32}| \end{array} \right)$; sie faktorisiert offensichtlich über $T^2 \rtimes (\bar{}) \setminus G$.

Lemma. Für $b \in S_{\geq 0}^2 \times S_{\geq 0}^2$ gilt:

3.5

(1) $b \in \mathfrak{b}(G) \Leftrightarrow$ Der zweite Spaltenvektor b_2 liegt im sphärischen Dreieck mit den

$$\text{Eckpunkten } \frac{1}{\|(b_{13}, b_{12})\|} \begin{pmatrix} 0 \\ b_{13} \\ b_{12} \end{pmatrix}, \frac{1}{\|(b_{13}, b_{11})\|} \begin{pmatrix} b_{13} \\ 0 \\ b_{11} \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{\|(b_{12}, b_{11})\|} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $b \in \mathfrak{b}(G') \Leftrightarrow b_2$ liegt auf dem Rand dieses Dreiecks.

(3) \mathfrak{b} induziert Einbettungen von $T^2 \rtimes (\bar{}) \setminus G$ und $Q \setminus G' / Q$. Dies zeigt erneut die Injektivität der kanonischen Abbildung $Q^2 \setminus G' \longrightarrow T^2 \rtimes (\bar{}) \setminus G$.

BEWEIS. Zu (1):

b_2 liegt in besagtem sphärischen Dreieck

\Leftrightarrow Die Skalarprodukte im \mathbb{R}^3 von b_2 mit den Normalenvektoren der Seiten $\begin{pmatrix} -b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} \\ -b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ -b_{13} \end{pmatrix}$ sind nichtnegativ

$\Leftrightarrow b_2$ erfüllt die linearen Ungleichungen

$$b_{11}b_{12} \leq b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32},$$

$$b_{21}b_{22} \leq b_{31}b_{32} + b_{11}b_{12}$$

$$\text{und } b_{31}b_{32} \leq b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}$$

\Leftrightarrow Es gibt ein ebenes Dreieck (in \mathbb{C}) mit den Seitenlängen $b_{11}b_{12}$, $b_{21}b_{22}$ und $b_{31}b_{32}$

\Leftrightarrow Für geeignete $\lambda_{ij} \in \text{U}(1)$ stehen $\begin{pmatrix} \lambda_{11}b_{11} \\ \lambda_{21}b_{21} \\ \lambda_{31}b_{31} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda_{12}b_{12} \\ \lambda_{22}b_{22} \\ \lambda_{32}b_{32} \end{pmatrix}$ in \mathbb{C}^3 senkrecht aufeinander

$\Leftrightarrow b \in \mathfrak{b}(G)$.

Zu (2): Im Beweis von (1) gilt

b_2 liegt auf dem Rand des besagtem sphärischen Dreiecks

\Leftrightarrow Eines der Skalarprodukte im \mathbb{R}^3 ist null

\Leftrightarrow Eine der Ungleichungen ist eine Gleichung

\Leftrightarrow Das ebene Dreieck artet aus

\Leftrightarrow Die λ_{ij} können in $\{1, -1\}$ gewählt werden

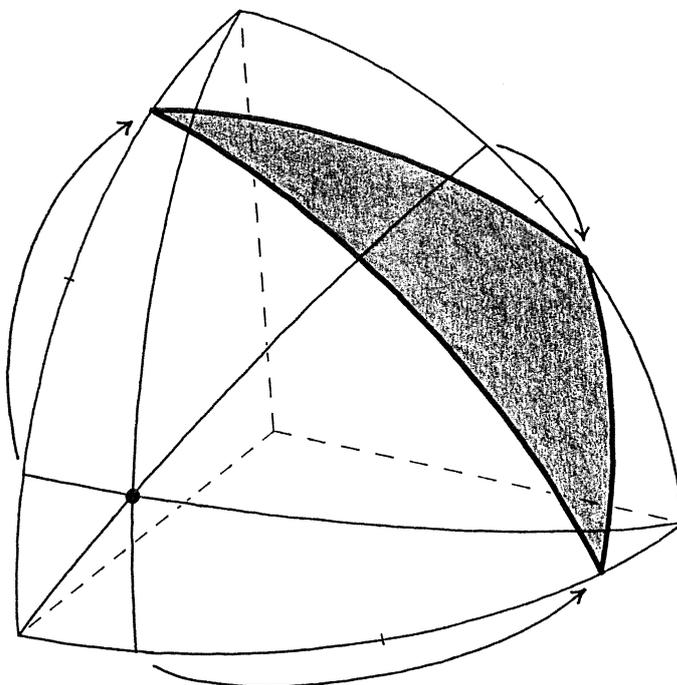
$\Leftrightarrow b \in \mathfrak{b}(G')$.

Zu (3): Im $T^2 \times (\bar{\quad})$ -Orbit einer Matrix, deren erste beiden Spalten voll besetzt sind, liegt ein A mit $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12} > 0$ und $\mathrm{Im} a_{22} \geq 0$. Der Beweis von (1) zeigt, daß ein solches A durch $\mathfrak{b}(A)$ bereits festliegt. Für schwächer besetzte Matrizen lassen sich ähnliche Repräsentanten auszeichnen. Bei $Q \setminus G' / Q$ führen dieselben elementaren Überlegungen zum Ziel. \square

Das Bild von G unter \mathfrak{b} ist eine Menge von Punktepaaren auf dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $S_{\geq 0}^2$. Die „Fasern“ der Projektion $p: \mathfrak{b}(G) \rightarrow S_{\geq 0}^2, b \mapsto b_1$, auf den ersten der beiden Punkte lassen sich elementargeometrisch konstruieren:

- (1) Nimm einen Punkt aus $S_{\geq 0}^2$.
- (2) Bilde die sphärischen Geraden durch ihn und jeweils eine Ecke von $S_{\geq 0}^2$.
- (3) Nimm deren Schnittpunkte mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten.
- (4) Spiegele diese an den jeweiligen Seitenmitten.

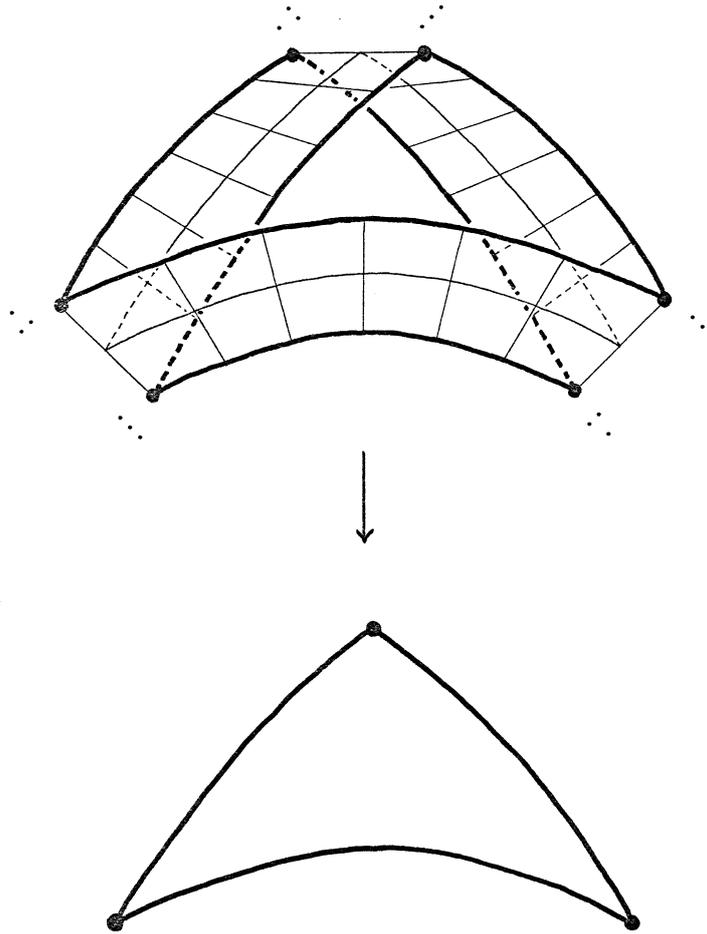
Die so erhaltenen Punkte sind die Ecken des gesuchten sphärischen Dreiecks. Für einen inneren Punkt von $S_{\geq 0}^2$ ist dies ein echtes sphärisches Dreieck, für einen Randpunkt entartet es zu einer sphärischen Strecke.



Zeichnung 32: Geometrische Konstruktion der Fasern

$p^{-1}|_{\mathrm{int}(S_{\geq 0}^2)}$ ist global trivial, $p^{-1}|_{\partial S_{\geq 0}^2}$ ist ein Möbiusband, das bereits beide Gerüste enthält: die Quotienten der niederen Scheibentypenstrata F_S (siehe Definition 2.2) und die Quotienten der niederen Bruhatzellen F_B (siehe Lemma 3.3).

Es gibt ein zu p homotopes q , das über $\mathrm{int}(S_{\geq 0}^2)$ nach wie vor global trivial mit typischer Faser D^2 ist, über $\partial S_{\geq 0}^2$ jedoch ein Homöomorphismus. Der Totalraum muß daher eine D^4 sein:



Zeichnung 33: p , eingeschränkt auf den Rand

Lemma. *Es gilt $\mathfrak{b}(G) \approx D^4$ und $\mathfrak{b}(G') = \partial\mathfrak{b}(G) \approx S^3$.*

3.6

BEWEIS. Fasse S^1 und D^2 als Teilmengen von \mathbb{C} sowie S^3 und D^4 als Teilmengen von \mathbb{C}^2 auf.

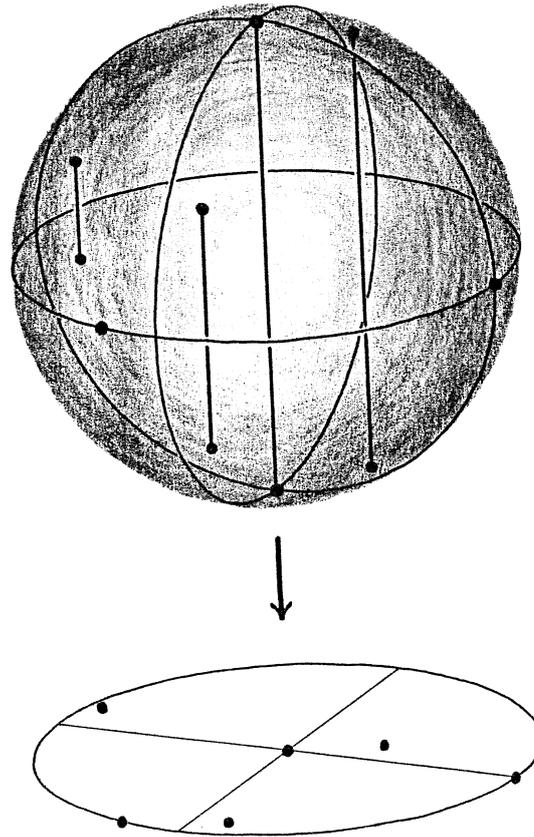
(1) $M := \{ (x, y) \in S^1 \times D^2 \mid y^2 = x|y|^2 \}$ ist ein Modell des Möbiusbandes und $f: S^1 \times D^2 \rightarrow M, (x, y) \mapsto (x, p_x(y))$, die faserweise orthogonale Projektion auf M , wobei p_x die Abbildung $D^2 \rightarrow D^2, y \mapsto \text{Re}(y\sqrt{x})\sqrt{x}$, bezeichnet.

Das Bild von G und \mathfrak{b} ist zu $(D^2 \times D^2) \cup_f M$ homöomorph: Die Degeneration der Fasern von p über dem Rand S^1 der Basis wird gedeutet als Zusammendrücken der Faser D^2 auf eine Strecke, deren Richtung $\mathbb{R}\sqrt{x}$ mit $x \in S^1$ variiert. Außerdem werden die stückweise glatten Mannigfaltigkeiten: die Basis, die Fasern über inneren Punkten und $p^{-1}(S^1)$ durch D^2, D^2 und M ersetzt.

(2) Sei $g: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1$ die Projektion auf den ersten Faktor.

$$\begin{array}{ccc}
 Z_f & \xrightarrow{i} & S^1 \times D^2 \times I \\
 [(x, y, t)] & \longmapsto & (x, (1-t)y + tp_x(y), t)
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 Z_g & \xrightarrow{i} & S^1 \times D^2 \times I \\
 [(x, y, t)] & \longmapsto & (x, (1-t)y, t)
 \end{array}$$

sind Einbettungen der Abbildungszylinder. Die Projektion auf den ersten Faktor



Zeichnung 34: Symbolische Zeichnung von p mit D^1 statt D^2 als Fasern

macht sie zu Faserbündeln über S^1 mit typischer Faser $\mathrm{conv}(D^2 \times 0 \cup [-1, 1] \times 1)$ bzw. $\mathrm{conv}(D^2 \times 0 \cup 0 \times 1)$.

Sei $(x, z, t) \in S^1 \times (D^2 \setminus 0) \times I$. Der Strahl $\mathbb{R}_{>0} \cdot (z, t)$ schneidet die Ränder der Fasern über x in je einem Punkt. Nenne das Verhältnis der Normen dieser Punkte $v(x, z, t)$. Die so definierte Abbildung $v: S^1 \times (D^2 \setminus 0) \times I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist stetig, ihr Bild kompakt.

$$\begin{array}{ccc} i(Z_g) & \longrightarrow & i(Z_f) \\ (x, z, t) & \longmapsto & (x, v(x, z, t) \cdot (z, t)) \end{array}$$

ist ein Homöomorphismus, seine Einschränkung auf $S^1 \times D^2 \times 0$ die Identität.

(3) Nach (1) ist für eine Kragenumgebung K von $S^1 \subset D^2$ $p^{-1}(K) \approx Z_f$. Mit Hilfe von (2) ist dann $(D^2 \times D^2) \cup_f M \approx (D^2 \times D^2) \cup_g S^1$. Schließlich ist

$$\begin{array}{ccc} (D^2 \times D^2) \cup_g S^1 & \longrightarrow & D^4 \\ [(x, y)] & \longmapsto & (x, (1 - |x|^2)^{\frac{1}{2}} y) \end{array}$$

ein Homöomorphismus.

(4) $\mathfrak{b}(G')$ wurde im vorigen Lemma explizit angegeben. Sein Bild unter dem gerade konstruierten Homöomorphismus $\mathfrak{b}(G) \approx D^4$ ist $\partial D^4 = S^3$, was den Umkehrschluß $\mathfrak{b}(G') = \partial \mathfrak{b}(G)$ zuläßt. \square

Satz. *Das Diagramm*

3.7

$$\begin{array}{ccc}
 T \setminus G / T & \longrightarrow & T^2 \times (\bar{}) \setminus G \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & Q \setminus G' / Q &
 \end{array}$$

geht durch Homöomorphismen über in

$$\begin{array}{ccc}
 S^4 & \longrightarrow & D^4 \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & S^3, &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

insbesondere ist $T \setminus G / T$ homöomorph zur 4-dimensionalen Sphäre.

BEWEIS. $T^2 \times (\bar{}) \setminus G \xrightarrow{\mathfrak{b}} (S_{\geq 0}^2)^2$ ist nach Lemma 3.5 (3) injektiv, das Bild des Raumpaares $(T^2 \times (\bar{}) \setminus G, Q \setminus G' / Q)$ unter \mathfrak{b} ist nach Lemma 3.6 homöomorph zu (D^4, S^3) und $T \setminus G / T \longrightarrow T^2 \times (\bar{}) \setminus G$ ist nach Lemma 3.4 (3) eine entlang $Q \setminus G' / Q$ verzweigte, zweiblättrige Überlagerung. \square

Einbettung der Quotienten

Definiere folgende Polynome in den Einträgen einer dreireihigen Matrix B :

$$\begin{aligned}
 s_j &:= \sum_i b_{i,j}, & {}^t s_i &:= \sum_j b_{i,j}, \\
 d_{i,j} &:= b_{i,j-1} b_{i,j+1}, & {}^t d_{i,j} &:= b_{i-1,j} b_{i+1,j}, \\
 p_j &:= \sum_i d_{i,j} (d_{i,j} - 2d_{i+1,j}), & {}^t p_i &:= \sum_j {}^t d_{i,j} ({}^t d_{i,j} - 2{}^t d_{i,j+1}), \\
 \text{also etwa } p_3 &= \sum_i b_{i,1}^2 b_{i,2}^2 - 2 \sum_i b_{i,1} b_{i,2} b_{i+1,1} b_{i+1,2}.
 \end{aligned}$$

i und j durchlaufen dabei \mathbb{Z}_3 . Wie in 2.7 operiert $\mathfrak{S}_3^2 \times {}^t()$ auf dem 4-dimensionalen affinen Unterraum $\mathcal{A} := \{ B \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid \forall i, j: s_j = 1, {}^t s_i = 1 \}$, in dem $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ als Nullpunkt gewählt worden war. Definiere die algebraischen Teilmengen $U := \{ B \in \mathcal{A} \mid \forall i, j: p_j = 0, {}^t p_i = 0 \}$ und $U' := \{ B \in \mathcal{A} \mid p_3 = 0 \}$ von \mathcal{A} sowie die semialgebraischen $W := \{ B \in \mathcal{A} \mid \forall i, j: p_j \leq 0, {}^t p_i \leq 0 \}$ und $W' := \{ B \in \mathcal{A} \mid p_3 \leq 0 \}$. Setze für eine Teilmenge T von $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ $T_{\geq 0} := \{ B \in T \mid \forall i, j: b_{ij} \geq 0 \}$. Die

„Invariantenabbildung“ $f: G \rightarrow \mathcal{A}$, $A \mapsto (a_{ij} \overline{a_{ij}})_{ij}$, und ihre Einschränkung auf G' faktorisieren laut Lemma 3.5 (3) als

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & T^2 \times (\cdot) \setminus G \\ \cup & & \uparrow \\ G' & \longrightarrow & Q \setminus G' / Q \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \mathcal{A}.$$

Ihre Bilder beschreibt folgende

3.8 Proposition. Die Bildmenge $f(G) = W_{\geq 0} = W'_{\geq 0}$ ist der Abschluß der $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ enthaltenden Zusammenhangskomponente von $\mathcal{A} \setminus U$. Sein Rand ist die Bildmenge $f(G') = U_{\geq 0} = U'_{\geq 0}$. Die (irreduzible) Hyperfläche vierten Grades $U = U'$ ist die kleinste $f(G')$ enthaltende Varietät.

$f|_{G'}$ hat maximalen Rang genau auf dem Hauptstratum und bildet dieses auf reguläre, die niederen Strata auf singuläre Punkte von U ab. Das Bild der niederen Strata ist simplizial.

BEWEIS. Der Beweis erfolgt in acht Schritten.

(1) $f(G) = W'_{\geq 0}$ und $f(G') = U'_{\geq 0}$: Sei $B \in \mathcal{A}_{\geq 0}$ und $c_j := \sqrt{b_{j1} b_{j2}}$. Die Umformungen

$$\begin{aligned} c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 &\leq 2(c_2^2 c_3^2 + c_3^2 c_1^2 + c_1^2 c_2^2) \\ \Leftrightarrow (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)^2 &\leq (2c_2 c_3)^2 \\ \Leftrightarrow -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &\leq 2c_2 c_3 \geq c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 \\ \Leftrightarrow (c_2 - c_3)^2 &\leq c_1^2 \leq (c_2 + c_3)^2 \\ \Leftrightarrow c_1 &\leq c_2 + c_3 \wedge c_2 \leq c_3 + c_1 \wedge c_3 \leq c_1 + c_2 \end{aligned}$$

implizieren folgende Äquivalenzen:

$$B \in W'$$

$$\Leftrightarrow c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \leq 2(c_2^2 c_3^2 + c_3^2 c_1^2 + c_1^2 c_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \text{ liegt im Inneren oder auf dem Rand des die winkelhalbierenden}$$

Strahlen $\{x = y\}$, $\{y = z\}$ und $\{z = x\}$ enthaltenden Kreiskegels

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ liegt in der konvexen Hülle dieser Strahlen}$$

$$\Leftrightarrow c_1, c_2, c_3 \text{ sind die Seitenlängen eines Dreiecks}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_{ij} \sqrt{b_{ij}})_{ij} \in G \text{ für geeignete } \lambda_{ij} \in U(1).$$

Die Aussage „ $B \in U' \Leftrightarrow (\lambda_{ij} \sqrt{b_{ij}})_{ij} \in G'$ für geeignete $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_2$ “ folgt durch Übergang zu den Rändern.

(2) $f|_{G'}$ hat den behaupteten Rang: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G' & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \\
 \downarrow j & & \cong \downarrow \text{pr} \\
 M \subset M(3 \times 2, \mathbb{R}) & \xrightarrow{h} & M(3 \times 2, \mathbb{R}), \\
 & (a_{ij})_{ij} \longmapsto & (a_{ij}^2)_{ij}
 \end{array}$$

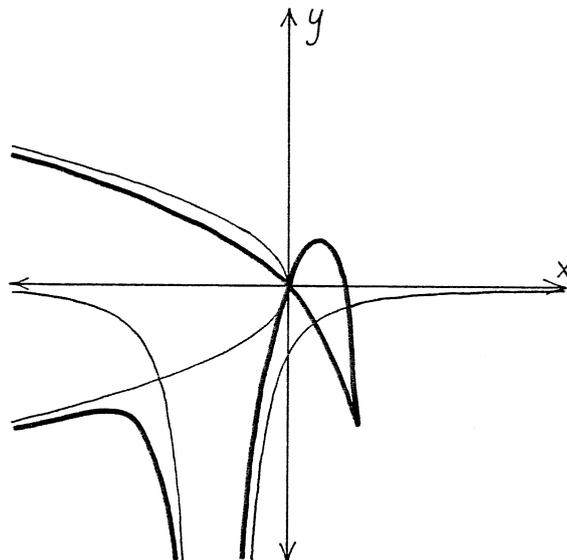
wobei M die 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit $\{A \mid (a_{i1})_i \perp (a_{i2})_i \text{ und } A \neq 0\}$ bezeichne. Die leichten Nachweise der folgenden Äquivalenzen bleiben unausgeführt: A gehört dem Hauptstratum von G' an

- \Leftrightarrow Höchstens ein Eintrag von $j(A)$ verschwindet
- $\Leftrightarrow h$ hat in $j(A)$ Rang 5 oder 6
- $\Leftrightarrow h|_M$ hat in $j(A)$ Rang 5
- $\Leftrightarrow h|_{j(G')}$ hat in $j(A)$ Rang 3
- $\Leftrightarrow f|_{G'}$ hat in A Rang 3.

(3) U' ist irreduzible Hyperfläche vierten Grades: $q := \frac{1}{16}(x+1)^2 y^2 + \frac{1}{2}x(3x-1)y + x^2(2x-1)$ ist die Einschränkung von p_3 auf die Ebene

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x & 1-x & 2x \\ 1-x & 1-x-y & 2x+y \\ 2x & 2x+y & 2-4x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Einschränkung $\{q = 0\} = \left\{ y = \frac{4x(1-3x \pm \sqrt{2(1-x)^3})}{(1+x)^2} \right\}$ von U' ist eine Kurve vierten Grades mit einer Spitze in $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, einem Doppelpunkt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, asymptotisch gleich $\{y = \frac{-32}{(1+x)^2}\}$ für $x \rightarrow -1$ und asymptotisch gleich $\{x = \frac{y^2}{-32}\}$ für $x \rightarrow -\infty$.



Zeichnung 35: Qualitative Zeichnung der Kurve vierten Grades

Da sie weder eine Gerade noch einen Kegelschnitt enthält, ist sie irreduzibel. Da der Grad von q nicht kleiner als der von p_3 ist, muß auch U' irreduzibel sein. Wegen (2) ist U' eine Hyperfläche.

(4) Es gilt $W_{\geq 0} = W'_{\geq 0}$ und $U_{\geq 0} = U'_{\geq 0}$ wegen (1) und der \mathcal{S} -Invarianz von $f(G)$ und $f(G')$.

(5) Wegen $\dim f(G') = 3 = \dim U$ und der Irreduzibilität von U ist U die kleinste $f(G')$ enthaltende Varietät. Wegen $f(G') \subset U \subset U'$ und der Irreduzibilität von U' ist $U = U'$.

(6) Setze $e^{\frac{2\pi i}{12}} =: \zeta$. Wegen $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^4 & \zeta^{11} \\ 1 & \zeta^8 & \zeta^7 \end{pmatrix}\right)$ und $f(G) \approx D^4$ sowie $\partial f(G) \subset U$ ist $f(G)$ der Abschluß besagter Zusammenhangskomponente.

(7) Das Bild der niederen Strata ist simplizial, denn

$$f\left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R},$$

ist die $f\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & \\ & & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ verbindende Strecke.

(8) Wegen (2) und der Irreduzibilität von U bildet f das Hauptstratum von G' auf reguläre Punkte von U ab. Daß $p_3|_{\mathcal{A}}$ und $(p_3|_{\mathcal{A}})'$ sogar auf der gesamten Geraden durch $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ verschwinden, ist leicht nachzurechnen. \square

BEMERKUNG. Die verwendeten algebraisch-geometrischen Schlüsse gelten ungeachtet der algebraischen Unabgeschlossenheit des Grundkörpers \mathbb{R} .

$\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} = \{\text{id}, (\bar{}), {}^t(), ()^{-1}\}$ war die Symmetriegruppe des Quotienten $T \setminus G / T$ und $\varepsilon: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ der Morphismus mit Kern $\{\text{id}, {}^t()\}$. Sei $\zeta: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{id}, {}^t()\}$ der Morphismus mit Kern $\{\text{id}, (\bar{})\}$. Der Quotient $T \setminus G / T$ besitzt nun eine äquivariante Einbettung in die 5-dimensionale, dadurch eindeutig bestimmte Darstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathcal{I} \times \mathcal{A} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{A} \times \mathbb{R}. \\ ((\sigma, \tau), c), (B, r) &\longmapsto (P_\sigma^{\zeta(c)} B P_\tau^{-1}, \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) \varepsilon(c) r) \end{aligned}$$

3.9 Satz.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathcal{I} & \longrightarrow & \text{O}(5) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T \setminus G / T & \xrightarrow{(f, i)} & \mathcal{A} \times \mathbb{R} \\ TAT & \longmapsto & ((a_{ij} \overline{a_{ij}})_{ij}, \text{Im} \sum_{\varepsilon(\sigma)=1} \prod_k a_{k, \sigma(k)}) \end{array}$$

ist eine äquivariante topologische Einbettung, gegeben durch invariante, homogene, ganzzahlige Polynome zweiten und dritten Grades in den Matrixeinträgen und ihren komplex Konjugierten.

BEWEIS. Gemäß Lemma 3.5 (3) faktorisiert f als $G \longrightarrow T^2 \times (\bar{}) \setminus G \hookrightarrow \mathcal{A}$, gemäß Lemma 3.4 trennt i die bei $T \setminus G / T \longrightarrow T^2 \times (\bar{}) \setminus G$ zusammenfallenden Punkte. \square

Differenzierbarkeit

Wähle für das Scheibendiagramm Δ^{ab} gemäß Proposition II 5.8 ein Tubensystem φ und eine Linearisierung \mathcal{V} . Da das Scheibendiagramm $\{\epsilon, [\sigma_{(1,1)}], [\sigma_{(1,1,1)}]\}$ der äquivarianten Mannigfaltigkeit $\text{SU}(3)$ in Δ^{ab} enthalten ist, führen Lemma I 4.18 und Satz I 7.7 zu einer Mf-Matrix $\begin{pmatrix} \text{SU}(3) & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta(\text{SU}(3)) & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$. Insbesondere ist $(T \setminus \text{SU}(3) / T, \mathcal{D})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der die Symmetriegruppe $\mathfrak{S}_3^2 \times \mathcal{I}$ durch Diffeomorphismen operiert.

Das Scheibendiagramm $\{\epsilon, [\tau^1], [\tau^2]\}$ der äquivarianten Mannigfaltigkeit $\text{SO}(3)$ ist ebenfalls in Δ^{ab} enthalten. Das Tubensystem ψ läßt sich, da $(\bar{})$ -invariant, auf $\text{SO}(3)$ einschränken. Bezeichne mit \mathcal{D}' die eindeutig existierende Quotientenstruktur auf $\begin{pmatrix} \text{SO}(3) & \psi|_{\text{SO}(3)} \\ \Delta(\text{SO}(3)) & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$. Mit Hilfe von II 5.9 läßt sich nachrechnen, daß die kanonische Abbildung $(Q \setminus \text{SO}(3) / Q, \mathcal{D}') \longrightarrow (T \setminus \text{SU}(3) / T, \mathcal{D})$ eine differenzierbare Einbettung ist. 3.10

Ich zeige nun, daß die Daten der $\text{SU}(3)$ enthaltenden Mf-Matrix bis auf Isotopie eindeutig sind, wenn man für $\mathcal{V}|_{\cdot}$ und \mathcal{D} einen etwas schwächeren Isotopiebegriff als in I §8 zugrunde legt.

Betrachte zunächst die Operation von $\text{O}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ auf dem komplexifizierten Halbraum $C^3 = \mathbb{C} \times \partial H^3$, siehe II 2.7. Dabei ist $\partial H^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{\nu} x_{\nu} = 0\}$, und \mathfrak{S}_3 operiert als die Einschränkung der Standardoperation auf \mathbb{R}^3 . S^3 bezeichne die Einheitssphäre von C^3 , S^2 die Einheitssphäre von $\mathbb{R} \times \partial H^3$, D^2 die abgeschlossene Halbsphäre von $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \partial H^3 \cong H^3$ und S^1 die Einheitssphäre von ∂H^3 .

Lemma. *Zu jedem $\text{O}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ -äquivarianten Diffeomorphismus f von S^3 auf sich gibt es genau einen isometrischen, äquivarianten Diffeomorphismus l von S^3 auf sich, so daß $l \circ f$ äquivariant diffeotop zur Identität ist.* 3.11

BEWEIS. Alle Abbildungen seien stillschweigend äquivariant.

(1) Setze $p_1 := (0, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) \in S^3$ und $p_2 := (1, 0) \in S^3$. p_2 ist gerade der Mittelpunkt von D^2 . Jede Selbstabbildung der S^3 überführt die Mengen $\{p_1, -p_1\}$, $\{p_2, -p_2\}$, S^1 und S^2 in sich, da sie Fixpunktmenngen von Untergruppen von $\text{O}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ sind.

(2) Damit $l \circ f$ diffeotop zur Identität sein kann, muß diese Abbildung p_1 und p_2 fest lassen, d. h. es muß $l(p_1) = f(p_1)$ und $l(p_2) = f(p_2)$ gelten. Da der Zentralisator von $\text{O}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ in $\text{O}(C^3)$ aus den vier Abbildungen $(z, x) \mapsto (\pm z, \pm x)$ besteht, gibt es nach (1) genau ein l , das diese Bedingung erfüllt.

(3) Da die Einschränkung von $l \circ f$ auf S^1 ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist, ist $l \circ f$ diffeotop zu einem g , das nahe S^1 die Identität ist. Weiterhin gilt $g(p_2) = p_2$. Alle folgenden Diffeomorphismen und Diffeotopien mögen nahe S^1 bzw. nahe $I \times S^1$ die Identität sein. Anhand der Operation der 1-Komponente von $O(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ erkennt man, daß $O(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ -äquivalente Diffeomorphismen der S^3 , die p_2 fest lassen, umkehrbar eindeutig \mathfrak{S}_3 -äquivalenten Diffeomorphismen der D^2 entsprechen. Letztere sind nach [Smale], Theorem 4, nichtäquivalent diffeotop zur Identität. Nach [Bredon], S. 313, folgt daraus auch ihre äquivalente Diffeotopie zur Identität. \square

BEMERKUNG. Mit Hilfe der Symmetriegruppe ließ sich die Dimension des Problems um 1 reduzieren. Zum Beweis reichte deshalb ein Resultat über Diffeotopien zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Die Scheibentypen ϵ und $[\sigma_{(1,1)}]$ besitzen eindeutige Tubensysteme und Quotientenstrukturen. Setze $a := (1, 1, 1)$ und betrachte den äquivalenten Vektorraum $\sigma_a: G(a) \rightarrow O(\mathbb{C}^3)$ mit dem oben gewählten Tubensystem φ^{σ_a} . Der Quotient $G(a) \setminus S^5$ der Sphäre besitzt zu diesen Daten genau eine Quotientenstruktur, ist also ab jetzt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

3.12 Lemma. *Zu je zwei Quotientenstrukturen \mathcal{W} und \mathcal{W}' der Vr-Matrix $(\sigma_a \quad \varphi^{\sigma_a})$ gibt es eine äquivalente Diffeotopie $h: I \times G(a) \setminus S^5 \longrightarrow I \times G(a) \setminus S^5$ mit $\mathcal{W}' = h_1^*(\mathcal{W})$.*

BEWEIS. Die orthogonale Darstellung der Symmetriegruppe $O(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_3$ auf dem Quotienten $(G(a) \setminus \mathbb{C}^3, \mathcal{W})$ ist durch die topologische Eigenschaft „Die Fixpunktmenge von $O(\mathbb{C})$ und von \mathfrak{S}_3 sind zweidimensional, ihr Schnitt ist nulldimensional.“ charakterisiert. Sie ist deshalb zur orthogonalen Darstellung auf $(G(a) \setminus \mathbb{C}^3, \mathcal{W}')$ isomorph. Sei f die Einschränkung eines Isomorphismus $(G(a) \setminus \mathbb{C}^3, \mathcal{W}') \longrightarrow (G(a) \setminus \mathbb{C}^3, \mathcal{W})$ auf die Einheitssphären. Wähle l und eine Diffeotopie h mit $h_1 = l \circ f$ gemäß Lemma 3.11. Dann gilt $h_1^* \mathcal{W} = (l \circ f)^* \mathcal{W} = f^* \mathcal{W} = \mathcal{W}'$. \square

Die angestrebte Aussage über die Eindeutigkeit der differenzierbaren Struktur auf dem Quotienten lautet nun:

3.13 Proposition. *Je zwei Quotientenstrukturen \mathcal{D} und $\tilde{\mathcal{D}}$ der äquivalenten Mannigfaltigkeit $\mathrm{SU}(3)$ sind als differenzierbare Strukturen isotop, d. h. es gibt eine topologische Isotopie $k: I \times T \setminus \mathrm{SU}(3) / T \longrightarrow I \times T \setminus \mathrm{SU}(3) / T$ von Homöomorphismen mit $k_0 = \mathrm{id}$ und $\tilde{\mathcal{D}} = k_1^*(\mathcal{D})$.*

BEWEIS. Sei $\begin{pmatrix} \mathrm{SU}(3) & \psi & \mathcal{D} \\ \Delta(\mathrm{SU}(3)) & \varphi|_{\cdot} & \mathcal{V}|_{\cdot} \end{pmatrix}$ die oben gewählte und $\begin{pmatrix} \mathrm{SU}(3) & \tilde{\psi} & \tilde{\mathcal{D}} \\ \Delta(\mathrm{SU}(3)) & \chi & \mathcal{W} \end{pmatrix}$ eine weitere $\mathrm{SU}(3)$ enthaltende Mf-Matrix. Da die behauptete Isotopie schwächer als eine Isotopie von Quotientenstrukturen ist, kann laut (Sd) und (Mf) aus Lemma I 8.10 $\chi = \varphi|_{\cdot}$ und $\tilde{\psi} = \psi$ angenommen werden. \mathcal{W} und $\mathcal{V}|_{\cdot}$ sind auf ϵ und $[\sigma_{(1,1)}]$ wegen der eindeutigen Linearisierbarkeit dieser Scheibentypen gleich. Nach Satz I 7.7 stimmen

deshalb $\tilde{\mathcal{D}}$ und \mathcal{D} außer auf dem tiefsten Stratum $X := (T \setminus \mathrm{SU}(3) / T)_{[\sigma_{(1,1,1)}]}$ überein.

Definiere nun k in einer Umgebung $I \times U$ von $I \times X$ mit Hilfe des Lemmas 3.12 und der topologischen Einbettung $\overline{\psi_{[\sigma_{(1,1,1)}]}}: U \rightarrow T \setminus \mathrm{SU}(3) / T$. Die Einschränkung dieser Isotopie auf $I \times (U \setminus X)$ ist eine differenzierbare Isotopie offener Einbettungen mit kompaktem Komplement. Sie läßt sich daher gemäß Lemma I 8.6 zu einer Diffeotopie auf $T \setminus \mathrm{SU}(3) / T \setminus X$ fortsetzen. Insgesamt ist k dadurch auf dem ganzen Orbitraum definiert. \square

An wesentlichen Eigenschaften der äquivarianten Mannigfaltigkeiten $\mathrm{SU}(3)$ und $\mathrm{SO}(3)$ sind damit bewiesen:

- (1) Der Quotient $T \setminus \mathrm{SU}(3) / T$ besitzt eine ausgezeichnete Isotopieklasse differenzierbarer Strukturen, und der Quotient $Q \setminus \mathrm{SO}(3) / Q$ ist in kanonischer Weise eine invariante differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $T \setminus \mathrm{SU}(3) / T$ (siehe 3.10 und Proposition 3.13).
- (2) Das Paar $(T \setminus \mathrm{SU}(3) / T, Q \setminus \mathrm{SO}(3) / Q)$ ist homöomorph zu (S^4, S^3) (siehe Satz 3.7).
- (3) Das Paar $(T \setminus \mathrm{SU}(3) / T, Q \setminus \mathrm{SO}(3) / Q)$ besitzt eine äquivariante topologische Einbettung in $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ durch invariante homogene Polynome zweiten und dritten Grades auf $\mathrm{SU}(3)$ (siehe Satz 3.9).
- (4) $Q \setminus \mathrm{SO}(3) / Q$ ist äquivariant diffeomorph zu S^3 mit orthogonaler Operation (siehe Korollar 2.9).

Offen bleibt die Frage, ob $(T \setminus \mathrm{SU}(3) / T, \mathcal{D})$ (äquivariant) diffeomorph zur vierdimensionalen Standardsphäre (mit der orthogonalen $\mathfrak{S}_3^2 \times \mathcal{I}$ -Operation) ist.

Literatur

- [Arens] Richard Arens, *Topologies for homeomorphism groups*, Amer. J. Math. **68** (1946), 593–610.
- [Arnol'd I] Vladimir Igorevich Arnol'd, *Distribution of ovals of the real plane of algebraic curves, of involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms*, Functional Anal. Appl. **5** no. 3 (1971), 169–176, russisches Original in *Функциональный Анализ и Его Приложения* **5** no. 3 (1971), 1–9.
- [Arnol'd II] ———, *A branched covering of $\mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$, hyperbolicity and projective topology*, Siberian Math. J. **29** no. 5 (1988), 717–726, russisches Original: *Разветвленное накрытие $\mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$, гиперболичность и проективная топология*, Сибирский Математический Журнал **29** no. 5 (1988), 36–47.
- [Besse] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · London · Paris · Tokyo, 1987.
- [Böhm] Renate Böhm (verh. Vogt), *Orbitmannigfaltigkeiten*, Diplomarbeit, Bonn, 1975.
- [Borel] Armand Borel, *Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes*, Tôhoku Math. J. **13** (1961), 216–240.
- [Borel/Hirzebruch] ——— und Friedrich Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces, I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.
- [Bredon] Glen E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York · London, 1972.
- [Bröcker/Jänich] Theodor Bröcker und Klaus Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · London · Paris · Tokyo · Hong Kong · Barcelona, 1973, korr. Nachdruck 1990.
- [Conner] Pierre Euclide Conner, *Differentiable Periodic Maps*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1979.
- [Conner/Floyd] ——— und Edwin Earl Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1964.
- [Demazure] Michel Demazure, *Sur la structure birationnelle de B^u* , Invent. Math. **55** no. 2 (1979), 177–183.
- [Dold] Albrecht Dold, $SP^n(\mathbb{R}P_2) = \mathbb{R}P_{2n}$, unveröffentlicht (1990), eine Seite.

- [Douady/Hérault] A. Douady und L. Héroult, *Arrondissement des variétés à coins*, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 484–491.
- [Eschenburg] Jost-Hinrich Eschenburg, *Freie isometrische Aktionen auf kompakten Lie-Gruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, 2. Serie, Heft 32, 1984.
- [Feck] Karl Feck, *r-spezielle G-Mannigfaltigkeiten über M*, Diplomarbeit, Bonn, 1974.
- [Hansen] H. C. Hansen, *On cycles in flag manifolds*, Math. Scand. **33** (1973), 269–274.
- [Helgason] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, San Diego · New York · Berkley · Boston · London · Sydney · Tokyo · Toronto, 1978.
- [Hirsch] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York · Heidelberg · Berlin, 1976.
- [Hirzebruch/Mayer] Friedrich Hirzebruch und Karl Heinz Mayer, *O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1968.
- [Illman] Sören Illman, *Smooth Equivariant Triangulations of G-Manifolds for G a Finite Group*, Math. Ann. **233** (1978), 199–220.
- [Jänich] Klaus Jänich, *Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1968.
- [Kirby/Siebenmann] Robin C. Kirby and Laurence C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1977.
- [Klaus] Stephan Klaus, *Einfach-zusammenhängende Kompakte Homogene Räume bis zur Dimension Neun*, Diplomarbeit, Mainz, 1988.
- [Kuiper] Nicolaas H. Kuiper, *The Quotient Space of CP(2) by Complex Conjugation is the 4-Sphere*, Math. Ann. **208** (1974), 175–177.
- [Lellmann] Wolfgang Lellmann, *Orbiträume von G-Mannigfaltigkeiten und stratifizierte Mengen*, Diplomarbeit, Bonn, 1975.¹
- [Massey] W. S. Massey, *The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere*, Geometriae dedicata **2** (1973), 371–374.
- [Mather I] John Nathan Mather, *Notes on topological stability*, vervielfältigtes Typoskript, Harvard University, 1970.
- [Mather II] ———, *Stratifications and Mappings*, S. 195–232 in: Dynamical Systems, Hrsg. M. M. Peixoto, Academic Press, New York · London.

¹[Lellmann] zitiert in einem Beweis fehlerhafte Literatur, wie [Illman] bemerkt. Sein Ergebnis bleibt jedoch richtig.

- [Montgomery/Zippin I] Deane Montgomery und Leo Zippin, *Theorem on Lie Groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 448–452.
- [Montgomery/Zippin II] ———, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, New York · London, 1955.
- [Neumann] Walter D. Neumann, *S^1 -Actions and the α -Invariant of their Involutions*, Bonner Mathematische Schriften, Nr. 44, 1970.
- [Prill] David Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 375–386.
- [Smale] Stephen Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.
- [Spivak] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, vervielfältigtes Typoskript, 1970.
- [Verona] Andrei Verona, *Stratified Mappings — Structure and Triangulability*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · Tokyo, 1984.
- [Zahlen] Heinz-Dieter Ebbinghaus et al., *Zahlen*, zweite, überarbeitete und ergänzte Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York · London · Paris · Tokyo, 1988.

Stichwörter

A

abelscher äquivarianter Vektorraum 144
abelscher Scheibentyp 144
abelsches Scheibendiagramm 144
abstrakte Stratifizierung 59
abstrakte Tube 59
abstrakte Tubenumgebung 59
Anfangsstadium (einer Isotopie) 73
äquivariante Mannigfaltigkeit 19
äquivarianter Vektorraum 21
 abelscher \sim 144
äquivariantes Prinzipalbündel 31
äquivariantes Vektorbündel 34
affiner Gruppenraum 30
Ausnahmeorbit 17

B

Bahn 15
Bahnenraum 15
beidseitige Operation einer Untergruppe
 175
Bruhatzerlegung 174
bündelhaft 123

D

Diffeotopie 39, 74
differenzierbare Struktur 14

E

Ecke 112
 tangente \sim 114
 normale \sim 114
 \sim im weiteren Sinne 118
Eckenschar 115
 normale \sim 117
 \sim im weiteren Sinne 120

Ellipse, Bestimmungsstücke einer \sim 146
Endlichkeit, lokale \sim 26
Endstadium (einer Isotopie) 73
erzeugtes Scheibendiagramm 88
euklidische Struktur 47
Exponentialmodell einer Sphäre 180

F

Familie 40
 leere \sim 40
 \sim von Tuben 40
Fixpunktmenge 15
Fuß (eines Scheibendiagramms) 24

G

Garbe
 (differenzierbare Struktur) 14
 (Familien von Tuben) 40
 (induzierte \sim reellwertiger Funktionen)
 18 f
 (Tuben) 39
Gerüst 177, 189
geschachteltes Bündel 98
Glättung 131
Glättungsfolge 133 f
Graph (gewisser Darstellungen) 108

H

Halbraum
 \sim (als Ecke) 113
 komplexifizierter \sim 119
 reellifizierter \sim 119
Halbraumeigenschaft 143
Halbraumschar 115, 130
Hauptorbit 17
Hauptorbittyp 17

Hauptorbitbündel 17
 Hauptstratum 27
 hinteres Spalten einer kurzen exakten Sequenz 118
 Höhe 24
 homogene Operation 18
 Hopfababbildung 52 f, 163

I

imaginärer Punkt von $P(V_{\mathbb{C}})$ 149
 Indexmenge (einer Ecke) 112
 induzierte Garbe reellwertiger Funktionen 18 f
 interne Isotopie 73
 Isometrie, isometrisch 34
 Isotopie 73 f
 interne \sim 73
 \sim riemannscher Metriken 74
 \sim von Automorphismen 74
 \sim von Prinzipalbündeln 78
 \sim von Quotienten (Q-Isotopie) 78
 \sim von Tuben 74
 \sim von Tubenabbildungen 74
 \sim von Tubensystemen (Ts-Isotopie) 75
 \sim von Tubenumgebungen 74
 topologische \sim 74
 differenzierbare \sim 74
 \sim (offener) Einbettungen 74
 \sim mit kompaktem Komplement 79
 Isotopieklasse
 \sim von Tubensystemen 76
 \sim von Quotientenstrukturen 83
 Isotropiegruppe 15
 Isotropieoperation 31

K

kanonische differenzierbare Struktur 19
 Kante (einer Ecke) 112
 Keim 38
 klassifizierende Abbildung einer Eckenschar 116
 Kodimension gewisser Darstellungen 107
 komplexer Raum 118
 komplexifizierter Halbraum 118 f

Komplement
 Isotopie mit kompaktem \sim 79
 (komplementäre Untermannigfaltigkeit) 151
 konditioniert (bei Isotopien) 73
 konjugierte Reduktion 97
 konstant (bei Isotopien) 73
 kurze Kante 179, 182

L

Länge (einer teilgeordneten Menge) 24
 \sim einer äquivalenten Mannigfaltigkeit 24
 \sim einer Ecke im weiteren Sinne 118
 \sim einer Ob-Isotopie-Matrix 75, 77 f
 \sim einer Ob-Matrix 41 f, 47 f, 55, 61 f
 \sim eines Scheibendiagramms 24
 \sim einer Stratifizierung 26
 lange Kante 179, 182
 leere Familie 40
 Linearisierung 48
 Linearisierungskarte 50
 sphärische \sim 49
 lokale Endlichkeit 26

M

Mannigfaltigkeit
 äquivalente \sim 19
 differenzierbare \sim 14
 G - \sim 15
 topologische \sim 14
 metrisch 34
 Mf 19
 Mf-Morphismus 44
 Mf-Matrix 42, 61 f
 Mf-Isotopie-Matrix 75, 78
 (Mf, Ts)-Morphismus 44
 Modifikation der Quotientenstruktur 70
 Modellschar 121
 Modellmorphismus 121
 Monometrie 34
 Morphismus
 \sim abstrakter Stratifizierungen 59 f
 \sim äquivanter Mannigfaltigkeiten 44

- ~ ~ mit Tubensystemen 44
- ~ äquivarianter Prinzipalbündel 31
- ~ äquivarianter Vektorbündel 34 f
- ~ ~ mit Tubensystemen 44
- ~ äquivarianter Vektorräume 21
- ~ ~ mit Tubensystemen 43
- ~ von Ecken 112
- ~ von Ecken im weiteren Sinne 118
- ~ von Eckenscharen 115
- ~ von Eckenscharen im weiteren Sinne 120
- ~ von Scheibendiagrammen 24
- ~ ~ mit Tubensystemen 44
- ~ von Scheibentypen 22
- ~ ~ mit Tubensystemen 44
- stratifizierter ~ 111
- Multiplikation von Scheibentypen 86 f

- N**
- nahe 39
- Nichtkern 92
- normale Ecke 114
- normale Eckenschar 117
- Normalenabstieg 43, 50, 127, 134
- Normalenäquivarianz 123
- Normalenexponentialabbildung 122
- Normalenschar 117
- Normaltube 122
- Nullschnitt 38

- O**
- Ob 40
- Ob-Matrix
 - dreispaltige ~ 47 f, 55, 61 f, 87 f
 - zweispaltige ~ 41, 87
- (Ob, Ts)-Morphismus 43 f
- Ob-Isotopie-Matrix
 - dreispaltige ~ 77 f
 - zweispaltige ~ 75
- Objekt 40, 118
- Öffnungswinkel (einer Ecke) 113
- Operation 14 f
- Orbit 15
 - singulärer ~ 17
- Orbitbündel 16
- Orbitraum 15
- Orbittyp 16
- orientierte Ellipse 147

- P**
- p -primärer Torus 175
- Parameter
 - ~ (einer Ecke) 113
 - ~ (einer Isotopie) 73
- Pb 31
- Pb-Morphismus 31
- prime Darstellung 92
- primer Scheibentyp 95
- Primfaktorzerlegung von Scheibentypen 95
- positiver Sektor 112
- positiver Strahl 112
- Produkt
 - ~ von Objekten 86 f
 - ~ von Tubensystemen 87
 - ~ von Quotientenstrukturen 87 f
- Produkteigenschaft 127, 143
- Produktschar 116

- Q**
- Q-Isotopie 78
- QM 71
- Qs-Isotopieklasse 83
- Quotient 15
- Quotientenabbildung 15
- Quotientenstruktur 48, 55, 61 f, 87 f

- R**
- Rand, Bemerkung zu Rändern 51
- Randbedingung 26
- Reduktion der Strukturgruppe 97
- reeller Punkt von $P(V_{\mathbb{C}})$ 149
- reeller Raum 118 f
- reellifizierter Halbraum 118 f
- relativer Automorphismus einer Ecke 112
- Rückzug
 - ~ einer Tubenfamilie 40
 - ~ eines Tubensystems 126
 - ~ einer Eckenschar 116

~ einer Glättung 132

S

\mathfrak{s} -Stratum 61

Schar 116, 120 f

Scheibe 16

Scheibendiagramm

~ einer äquivarianten Mannigfaltigkeit
24

~ eines äquivarianten Vektorbündels 35

~ eines äquivarianten Vektorraums 25

abelsches ~ 144

(grobes) ~ 24

Jänichs ~ 25

Scheibentyp

~ einer beliebigen Darstellung 23

~ einer äquivarianten Mannigfaltigkeit in
einem Punkt 23

abelscher ~ 144

(grober) ~ 21, 22

größter ~ 23 f

(Jänichs) ~ 20

Scheibentypenstratifizierung 26

schwache abstrakte Stratifizierung 59

Sd 24

Sd-Morphismus 24

Sd-Matrix 41, 48

Sd-Isotopie-Matrix 75, 77

(Sd,Ts)-Morphismus 44

Sorte (eines Objekts) 40, 118

spaltende komplex projektive Gerade 150

spaltende Überlagerung 106

spalten, hinten spaltende kurze exakte Se-
quenz 118

sphärische Linearisierungskarte 49

St 22

St-Morphismus 22

St-Matrix 41, 48

St-Isotopie-Matrix 75, 77

Stabilisator 15

Stadium (einer Isotopie) 73

Standgruppe 15

starten (bei Isotopien) 73

Strahl 111

stratifizierte Submersion 60

stratifizierte Teilmenge 111

stratifizierter Morphismus 111

stratifiziertes Bündel 115

Stratifizierung 26

abstrakte ~ 59

schwache abstrakte ~ 59

Whitney-~ 26

Scheibentypen^e 26

(St,Ts)-Morphismus 44

Symmetriegruppe 19

symmetrische Potenz 161

T

tangentiale Ecke 114

Teilmengenauswahl 126 f

Teilordnung

~ äquivarianter Vektorräume 23

~ von Orbits 16

~ (grober) Scheibentypen 23

~ Jänichscher Scheibentypen 25

~ eines Scheibendiagramms 24

~ einer Stratifizierung 26

Teilungsgruppe 19 f

Tiefe 24

Ts-Isotopie 75

Ts-Auswahl 127

Tube 39

abstrakte ~ 59

Tubensystem

~ einer äquivarianten Mannigfaltigkeit
42, 87

~ eines äquivarianten Vektorbündels 42,
87

~ eines äquivarianten Vektorraums 42,
87

~ einer Schar 123 f

~ eines Scheibendiagramms 42, 87

~ eines Scheibentyps 42, 87

Tubenumgebung 38

abstrakte ~ 59

Typ

Jänichs ~ einer Scheibendarstellung 20

~ eines äquivarianten Vektorraums 22

- ~ einer Glättungsfolge 133 f
- ~ eines Orbits 16
- ~ einer Teilmengenauswahl 127
- ~ einer Ts-Auswahl 128

U

Übertragen

- ~ von Tuben 39
- ~ von Tubenumgebungen 38
- ~ von Tubenfamilien 40
- ~ von Quotientenstrukturen 82

V

Vb 34 f

Vb-Morphismus 34 f

Vb-Matrix 41 f, 55

Vb-Isotopie-Matrix 75, 78

(Vb,Ts)-Morphismus 44

Verträglichkeit

- ~ mit Schachtelung 32

- ~ mit einer Abbildung 39
- ~ mit Modellmorphismen 127

Vr 22

Vr-Morphismus 21 f

Vr-Matrix 41, 47 f

Vr-Isotopie-Matrix 75, 77

(Vr,Ts)-Morphismus 43 f

W

wegweise submersiv 66

Whitney-Stratifizierung 26

Z

Zurückziehen

- ~ von Tubenumgebungen 38
- ~ von Tubensystemen 126
- ~ von Eckenscharen 116
- ~ von Glättungen 132

Symbole

Zeitweilige Belegungen von Symbolen sind in *Schrägschrift* erläutert;
bevorzugte Belegungen von Symbolen stehen *kursiv*.

\approx	homöomorph
\cong	kanonisch isomorph
$<, \geq$	kleiner bzw. größergleich (bei sämtlichen Teilordnungen)
R^\times	multiplikative Gruppe eines unitären Ringes R
$X_{\geq 0}$	$X \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ für $X \subset \mathbb{R}^n$
\simeq	diffeomorph 14
$H < G$	H ist Lie-Untergruppe von G 15
\sim	konjugiert (bei Untergruppen), äquivalent (bei Darstellungen) 16, 94
$H \triangleleft G$	H ist Lie-Normalteiler von G 19
σ'	wesentlicher Anteil der orthogonalen Darstellung σ 23
V'	nichttrivialer Summand des Moduls V 23
V_{triv}	trivialer Summand des Moduls V 23
$b \setminus a, q \setminus p$	Verschiebung in affinen Gruppenräumen 30
0_E	Nullschnitt des Vektorbündels E 34, 38
$A \supset \longrightarrow B$	Abbildung aus A in B 39
$..$	geeignet restringiert 57
$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}$	Multiplikation der Scheibentypen \mathfrak{s} und \mathfrak{t} 85f
$\Delta \cdot \Delta'$	Multiplikation der Scheibendiagramme Δ und Δ' 85
$+$	(faserweise) Addition (von Mengen) 115f
$(\)^\perp$	(faserweise) orthogonales Komplement 115f
$\widehat{\pi^n ..}$	<i>Anhebung von $\pi^n ..$</i> 122
\downarrow	pauschaler Abwärts Pfeil in kommutativen Diagrammen 126
$^*\varphi$	Rückzug des Tubensystems φ 126
*g	Rückzug der Glättung g 132
$\perp_{\mathbb{R}}$	reell orthogonal 147
$(\dot{\cdot}\cdot), (\cdot\dot{\cdot})$	Mengen von Matrizen bestimmter Besetzung 176
\blacksquare	Element von \mathfrak{S}_3 187
α_{E_\bullet}	Parameter der Eckenschar E_\bullet 115
α_{V_\bullet}	Parameter der Ecke V_\bullet 113
Δ	(<i>grobes</i>) <i>Scheibendiagramm</i> 24

Δ^{ab}	universelles abelsches Scheibendiagramm 138
ε	Signum einer Permutation, <i>erweitertes Signum</i> 190
η	<i>inneres Bündel</i> 98
ι_p	<i>Isotropieoperation im Punkte p</i> 31
μ	<i>oberes Bündel</i> 98
ν	<i>äußeres Bündel</i> 98
ξ	<i>unteres Bündel</i> 98
π	<i>Bündelprojektion</i>
π^n	<i>Bündelprojektion der Modellschar E_\bullet^n</i> 121
ϱ	<i>differenzierbare Operation bei Mf, Pb oder Vb</i> 19, 30 f, 34
ϱ^n	<i>Bündelprojektion der Halbraumschar H_\bullet^n</i> 130
σ	<i>orthogonale Darstellung, äquivarianter Vektorraum</i> 20 f
Σ^4	<i>4-Sphäre</i> 155
σ_a	<i>Darstellung von $G(a)$ auf \mathbb{C}^n</i> 107
τ	<i>orthogonale Darstellung, äquivarianter Vektorraum</i> 20 f
τ_a	<i>Darstellung von $Q(a)$ auf \mathbb{R}^n</i> 107
φ, χ, ψ	<i>Tubenabbildung, Tubenumgebung, Tube, Tubenfamilie, Tubensystem</i>
φ^{E_\bullet}	<i>Tubensystem einer Modellschar E_\bullet</i> 127
φ^n	<i>Tubensystem von E_\bullet^n</i> 132
φ_j	<i>Tube von U_j in E</i> 124 f
ω	<i>Quotientenabbildung</i> 15
ω_a	<i>Winkelabbildung</i> 107
A	<i>affiner Unterraum von $M(3 \times 3, \mathbb{R})$</i> 183
A_\bullet^n	<i>universelle Eckenschar</i> 113
(A1)–(A4)	<i>Äquivalenzbegriffe für Darstellungen</i> 20 f
$\text{Aut}(V_\bullet, V_J)$	<i>relative Automorphismen einer Ecke</i> 112
B	<i>Quotientenstruktur bei Vb</i> 55
B	<i>Basis eines Faserbündels</i> 30, 33 f, 96
b	<i>„Betragabbildung“</i> 191
C_\bullet^n	<i>komplexifizierter Halbraum</i> 119
\mathbb{C}_\bullet^n	<i>komplexer Raum</i> 118 f
cl	<i>abgeschlossene Hülle</i>
conv	<i>konvexe Hülle</i>
$\mathcal{C}(p)$	<i>Zentralisator von $\text{im } \iota_p$ in S</i> 101
\mathcal{D}	<i>Quotientenstruktur bei Mf</i> 61 f
d_i	<i>Erzeuger eines Strahls</i> 112
${}^t d_i$	<i>Erzeuger eines Strahls</i> 113
E	<i>(äquivariantes) Vektorbündel</i> 33 f

\mathcal{E}	Ellipsenmodell von $P(V_{\mathbb{C}})$ 147
e	der größte Scheibentyp 24
E_{\bullet}	Eckenschar im weiteren Sinne mit unterliegendem Vektorbündel E 120
\mathcal{E}^{kan}	kanonische differenzierbare Struktur auf gewissen Quotienten 18 f
E_{\bullet}^n	gewisse Eckenschar der Länge $n + 1$ 121
bE	Faser der Eckenschar E über dem Fußpunkt b 115
E_J, E_j	Strata einer Eckenschar E_{\bullet} 115, 124 f
$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$	Kategorie der Eckenscharen 115
$E(z)$	Bild von z im Ellipsenmodell 147
f_a	Familie von Linearisierungskarten 139
\mathcal{G}	Graph gewisser Darstellungen 108
\mathcal{G}	Symmetriegruppe von $\text{Sp}(1)$ 179
G	Symmetriegruppe bei Mf , Pb oder Vb 19, 31, 34
G	$\text{SU}(3)$ in IV 2 u. 3 176
G'	$\text{SO}(3)$ in IV 2 u. 3 178
g	Glättung 131
$G(a)$	Untergruppe eines Torus 107
${}^t g^n$	Faser der Glättungsfolge g^n im Punkte t 134
(G0)–(G6)	Eigenschaften einer Glättung 131
(GF2)–(GF4)	Eigenschaften einer Glättungsfolge 134
$\text{GL}(V, W)$	lineare Isomorphismen von V nach W 20
H	Teilungsgruppe bei Mf , Pb und Vb 19 f, 31, 34
\mathbb{H}	Quaternionen 163
\mathcal{H}	Symmetriegruppe von $\tilde{Q} \backslash \text{Sp}(1) / \tilde{Q}$ 182
H_{\bullet}^n	zu E_{\bullet}^n gehörige Halbraumschar 130
I	Einheitsintervall
I	Indexmenge, z. T. zu $\{1, \dots, n\}$ spezialisiert 111 f
\mathcal{I}	Menge der imaginären Punkte von $P(V_{\mathbb{C}})$ 149
\mathcal{I}	diskrete Symmetrien von $\text{SU}(3)$ 177
i	Imaginärteil der „halben Determinante“ 190
int	offener Kern
J	Indexmenge 112
K	Indexmenge 124
K	Teilungsgruppe bei Vr 21
K	Triangulierung von $\text{Sp}(1)$ 179
$\mathcal{K}(p)$	Bild von ι_p 31
K_x	Komplement im Punkte x 151
(K1)–(K3)	Konjugiertheitsbedingungen 101, 103

L	Triangulierung von S^3	182
l	Länge (eines Scheibendiagramms etc.)	24
(L1)–(L5)	Eigenschaften einer Linearisierungskarte	49
(L1')–(L5')	Eigenschaften einer sphärischen Linearisierungskarte	50
M	(äquivariante) Mannigfaltigkeit	19
Mf	Kategorie der äquivarianten Mannigfaltigkeiten	19
$M_s, M_s^n, M_s^{\leq n}$	Mengen von Modellscharen	121, 126 f
\mathbb{N}	natürliche Zahlen einschließlich der Null	
\mathcal{N}	Normalisator von K in H	27
n	Normalenvektor einer Ellipse	147
\mathcal{N}_Q	Normalisator von Q in $SO(3)$	178
$\mathcal{N}_{\tilde{Q}}$	Normalisator von \tilde{Q} in $Sp(1)$	178
$\mathcal{N}(p)$	Normalisator von $\text{im } \iota_p$ in \mathcal{S}	31
\mathbb{O}	Oktaven	
Ob	Variable für die Kategoriennamen Vr, St, Sd, Vb und Mf	40
ord	Ordnung eines Elements einer Gruppe	
$O(V, W)$	euklidische Isomorphismen von V nach W	20
P	Prinzipalbündel	30 f, 97
P_σ	Permutationsmatrix	175
\hat{P}_σ	modifizierte Permutationsmatrix	175
Pb	Kategorie der äquivarianten Prinzipalbündel	31
Q	maximaler 2-primärer Torus von $SO(3)$	175, 178
\tilde{Q}	Quaternionengruppe	178
$Q(a)$	Untergruppe eines 2-primären Torus	107
$Q(p)$	Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{C}(p)$	102
Q_s	Quotientenstruktur (nur in Zusammensetzungen)	
r	Zentralprojektion	155
R_\bullet^n	reellifizierter Halbraum	119 f
\mathbb{R}_\bullet^n	reeller Raum	119
$\mathbb{R}_{(\geq 0)}^n$	Produkt von Geraden und Halbgeraden	105 f
$\mathbb{R}_{>0} v$	von v erzeugter Strahl	111
res	Restriktion	
rk	Rang	
$R(p)$	Reduktion der Strukturgruppe auf $\mathcal{N}(p)$	32
\mathcal{S}	Symmetriegruppe von $SU(3)$	177
\mathcal{S}	Strukturgruppe eines Prinzipalbündels	30 f
\mathcal{S}	Stratifizierung	26

s_+	<i>positiver Strahl</i> 111 f
\mathfrak{S}_I	symmetrische Gruppe zur Menge I
$\text{SA}(V)$	selbstadjungierte Endomorphismen von V 152
Sd	Kategorie der (groben) Scheibendiagramme 24
$\text{SP}^n(X)$	n . symmetrische Potenz von X 161
span	(faserweise) lineares Erzeugnis 115
$(\text{span } V_J) \bullet$	<i>tangentiale Ecke</i> 114
St	Kategorie der (groben) Scheibentypen 22
$\text{St}_{\geq[V]}$	Menge aller Scheibentypen, die größergleich $[V]$ sind 25
$S(V)$	Einheitssphäre des euklidischen Vektorraums V 22
T	<i>maximaler Torus von $\text{SU}(3)$</i> 175 f
t	<i>Fußpunkt bei gewissen Eckenscharen</i> 116, 121
(T0)–(T7)	Eigenschaften eines Tubensystems einer Schar 123 f
(TA1)–(TA3)	Eigenschaften einer Ts-Auswahl 127
tr	Spur
Ts	Tubensystem (nur in Zusammensetzungen)
U_J, U_j	<i>Strata einer Teilmengenauswahl U</i> 123 ff
V	(<i>äquivarianter</i>) Vektorraum
V	<i>Veronesefläche</i> 153
v	<i>Veroneseeinbettung</i> 153
\mathcal{V}	<i>euklidische Struktur, Linearisierung</i> 47 f
$V \bullet$	<i>Ecke mit unterliegendem Vektorraum V</i> 112
$V_{\mathbb{C}}$	Komplexifizierung eines euklidischen Vektorraums V 147
V_J	<i>Stratum einer Ecke $V \bullet$</i> 112
$V_J^\perp \bullet$	<i>normale Ecke</i> 114
Vb	Kategorie der äquivarianten Vektorbündel 34 f
Vr	Kategorie der äquivarianten Vektorräume 22
w	<i>gemittelte Einbettung</i> 154
X	<i>Stratum</i> 26
\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z} modulo 2

Zeichnungen

1 – 2	Beispiel einer äquivarianten Mannigfaltigkeit und ihres Quotienten	29
3	Die Tube des tiefsten Stratums	46
4	Das Urbild unter der Quotientenabbildung einer differenzierbaren Kurve durch $\{0\}$	73
5	Geschachteltes Faserbündel	99
6	Beispiel eines Graphen	109
7	Ersetzung einer Zusammenhangskomponente der Kodimension 0 durch isolierte Ecken mit Schleifen	110
8 – 10	Ecken der Dimensionen 2 und 3	113
11	Isomorphietypen von Ecken und Morphismen	121
12	Ellipse	147
13	Signaturen entlang einer Geraden	155
14	Bild unter w einer spaltenden komplex projektiven Geraden	156
15	Lage der Untermannigfaltigkeiten	157
16	Zum Beweis des Satzes 2.7	160
17	Die abstrakt geometrische Interpretation	167
18 – 21	Die elementargeometrische Interpretation	168 – 169
22 – 24	Antipoden im Ellipsenmodell von Σ^4	171 – 172
25	Gerüst von $T \backslash \text{SU}(3)/T$ und $Q \backslash \text{SO}(3)/Q$	177
26	Von zweidimensionalem Simplex erzeugter sphärischer Unterraum	180
27 – 28	Die triangulierte $\text{Sp}(1)$ im Exponentialmodell	181
29	Quotientenbildung lokal	182
30	Die triangulierte S^3 im Exponentialmodell	184
31	In $\text{cl}(T \backslash B_\bullet/T)$ enthaltene Bruhatzellen bzw. Scheibentypenstrata	189
32	Geometrische Konstruktion der Fasern	192
33	p , eingeschränkt auf den Rand	193
34	Symbolische Zeichnung von p mit D^1 statt D^2 als Fasern	194
35	Qualitative Zeichnung der Kurve vierten Grades	197