Programm
der Arbeitsgemeinschaft in Oberwolfach
vom 07.-11.10.1996 über
Wiles' Beweis der Taniyama-Vermutung

Leitung: G. Faltings (MPI Bonn), G. Frey (IEM Essen)

Ziel der Arbeitsgemeinschaft ist es, den Beweis von Andrew Wiles für folgenden Satz zu erläutern:

Satz: Sei $E/\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve, die modulo 3 und 5 semistabile Reduktion besitzt. Dann ist E eine *modulare* elliptische Kurve.

Es folgen als *Korollare*:

1.) Jede elliptische Kurve $E/\mathbb{Q}$, bei der die Punkte der Ordnung 2 $\mathbb{Q}$-rational sind, ist modular.

2.) Die Fermatsche Vermutung ist richtig.

Als Leitfaden soll neben der Arbeit von Wiles [Wi] und der Arbeit von Taylor-Wiles ([Ta-Wi]) vor allem die Darstellung von Darmon, Diamond und Taylor: Fermat's Last Theorem [D-D-T] dienen, es ist zu erwarten, daß bis Ende Juni 1996 fast alle Ausarbeitungen von Vorträgen der Konferenz über FLT in Boston, August 1995, verfügbar sind, die den Vortragenden zur Verfügung gestellt werden können.
Die Vorträge sollen in der Regel 60 Minuten dauern; Mehrfachvorträge sind mit *.a, b,... bezeichnet und sollten möglichst im Team erarbeitet werden.
Der Inhalt der Vorträge wird unten durch Stichwörter angedeutet, weitere Präzisierung wird im Verlauf der Vorbereitung sicher in manchen Fällen noch notwendig sein.

Für Anfragen, Anmeldungswünsche und weitere Information (möglichst per e-mail) stehen

G. Faltings (e-mail: gerd@mpim-bonn.mpg.de)
G. Frey (e-mail: frey@exp-math.uni-essen.de)

zur Verfügung.

Vorträge

MONTAG

0)**Überblick**

I) Modulare Kurven

1) Arithmetik elliptischer Kurven und zugehöriger Galoisdarstellungen, das Gruppenschema der Punkte der Ordnung p von semistabilen elliptischen Kurven, Anwendung auf elliptische Kurven mit $\mathbb{Q}$-rationalen Punkten der Ordnung 2. L-Reihen und die Vermutung von Hasse-Weil, Charakterisierung der Isogenieklassen von elliptischen Kurven durch L-Reihen.

Literatur: [Si], [Se 1,2], [Fa]

2) Modulkurven (speziell $X_0(N)$ und $X_1(N)$) über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}$, modulare Interpretation der Punkte, Automorphismen (Involutionen und Diamond), spezielle Fasern der minimalen Modelle der Kurven und ihrer Jacobischen(Deligne-Rapoport, Raynaud), insbesonders Beschreibung des Torusteils und der Zusammenhangskomponenten samt Operation des Frobenius und der Involutionen w_q über $\mathbb{F}_q$, wenn $q \mid N$.

3) Heckeoperatoren als Korrespondenzen und in modularer Interpretation, Spitzenformen (analytisch und geometrisch),(q-)Alt-und Neuformen (wenn $q \mid N$) samt geometrischer Interpretation mit Heckeoperation, q-Entwicklungsprinzip. Einfache Faktoren von $J_0(N)$, Galoisdarstellungen zu Neuformen (p-adisch und mod p), Kongruenz von Eichler-Shimura, L-Reihen. Die Vermutung von Taniyama, speziell für elliptische Kurven, galoistheoretische Charakterisierung.

Literatur zu 2 +3: [Ri2], [De-Ra],[Ro], [Sh],[D-D-T],1 ohne 1.5,3,3.1-3.2

4)Die Hecke-Algebra $\mathbb{T}$, Definition modularer Darstellungen und Beschreibung durch maximale Ideale $\mathfrak{m}$ in $\mathbb{T}$. Gorensteineigenschaft von $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$. Multiplizitäts-1-Sätze. (Inhalt von 1.5 in [D-D-T], Chap.2.1 in [Wi].)
(zusätzliche Literatur: [Ma1],[Ti],[Ed],[Di],[Ri2]

5)(Zur Entspannung und nur 45 Minuten:) Die Ergebnisse von Mazur über rationale Punkte auf $X_0(N)(\mathbb{Q})$ d.h. über $\mathbb{Q}$-rationale Isogenien elliptischer Kurven. Modul-

kurven mit Geschlecht 0. Elliptische Kurven mit isomorpher Galoisstruktur.Erläuterung von:
Satz: Sei $E/\mathbb{Q}$ semistabil in 3 und 5. Dann gibt es eine Kurve $E'/\mathbb{Q}$ mit $\rho_{E',5} \simeq \rho_{E,5}$ und $\rho_{E',3}$ irreduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
Literatur: [Ma2],[Ru]

DIENSTAG

I Kongruenzen

6)Operation von $\mathbb{T}$ und besonders T_q auf der Fasern über $\mathbb{F}_q$ der Modulkurven und ihrer Jacobischen und auf dem q-Alt-bzw. Neuteil der Spitzenformen,Ribets Lemma (p.491 in [Wi]) als erstes Beispiel für Redundanz. Kongruenzen zwischen Spitzenformen, geometrische Interpretation,Beispiele (z.B. bei elliptischen Kurven).

Literatur:[Ri1,2,3],[Wi]

7) Zweidimensionale ungerade Galoisdarstellungen mod p, die Vermutung von Serre und ihre Verfeinerungen, Beispiele.
Literatur:[Se3],[Ri2],[Ca],[Di], [Ed]

8)Der Satz von Ribet-Carayol-Diamond.
a+b+c) Beweis für den semi-stabilen Fall.Interpretation der Zusammenhangskomponenten und des (Charakterings des) Torus der Jacobischen mod$q$ samt Hecke-Operation durch Eichlerordnungen, (besonders wichtig:) Langlands-Korrespondenz zwischen üblichen Modulkurven und Shimurakurven, Geometrie der Shimurakurven. Erläuterung der Verallgemeinerung von Carayol und Diamond. “Raising-and-lowering the level” . Als Belohnung:
SATZ: Taniyama impliziert Fermat.
Literatur: [Di], [Ri2],[Ca]

MITTWOCH

Galoisdeformationen

9)Definition von Galoisdeformationen vom Typ $\mathcal{D}$, modulare Deformationen und der zugehörige Heckering; Formulierung des Isomorphiesatzes von Wiles (Conj. 2.16), lokale Theorie([D-D-T],2.4, 2.5).
Literatur: [Ma3],[Wi],[D-D-T], [Wa]

10)Darstellbarkeitskriterien und explizite Konstruktion des universellen Deformationsrings
Literatur:[dSm-Le], [Ma3]

11)Berechnung von Selmergruppen, insbesonders 2.14, 2.15 aus [D-D-T], vgl. Thm.2 aus [Wa].
Literatur:[Wa]

DONNERSTAG

Modularität modulo 3

Literatur für 12-14: [Ge]

12) Artinsche L-Reihen, Artinsche Vermutung, bekannte Resultate, speziell für irreduzible zweidimensionale Darstellungen (Diederfall). Lifting von mod 3 Darstellungen zu komplexen Darstellungen, Zusammenhang mit Spitzenformen vom Gewicht 1, Zurückführung auf Proposition 1.4 von [Ge], und Erläuterung von Theorem 2.1 (Lecture I, [Ge])

13) Das Langlands-Programm (Lecture II von [Ge]). (Hier sollte noch einmal auf den Ribet-Carayol-Diamond- Satz eingegangen werden.)

14)Beweis der Artin-Langlands-Vermutung für zweidimensionale komplexe Galoisdarstellungen mit auflösbarem Bild:

a) Base Change (§6 [Ge])

b) Anwendung auf die Artinsche Vermutung /§7 [Ge])

FREITAG

Der Beweis des Hauptsatzes

15) Isomorphiekriterien von Faltings-Lenstra-Wiles
Literatur:[Ta-Wi],[D-D-T],[Ku]

16 a+b) Reduktion auf den minimalen Fall (insbesonders Redundanz von Hecke-operatoren der Stufe p und p^2 (2.2 und 2.3 in [Wi], vgl.Vortrag 6)
Literatur:[Wi],[Ri1,2]

17) Beweis im minimalen Fall

Literatur:[Wi],[Ta-Wi],[D-D-T],[d Sh1,2]

Literatur

Die wichtigsten Arbeiten sind [Wi],[Ta-Wi] und [D-D-T],in denen auch viele der unten aufgeführten (und noch viele weitere) Referenzen zu finden sind. Mit * sind erhältliche Manuskripte bezeichnet, (die bei Bedarf angefordert werden können,) mit ** Manuskripte, von denen erwartet wird, daß sie bis zur Tagung erhältlich sind.

[Ca] H.Carayol:Sur les représentations galoisiennes modulo l attachées aux formes modulaires; Duke Math. J. 59, 785-801(1989)

[dS-Le]* de Smits & H. Lenstra: Explicit construction of universal deformation rings; MS, Boston (1995)

[dSh1] E. de Shalit: On certain Galois representations related to the modular curve $X_1(p)$, erscheint in Comp. Math.

[dSh2]* E. de Shalit: Hecke rings and universal deformation rings, MS, Boston (1995)

[D-D-T]* H. Darmon, F. Diamond, R. Taylor: Fermat's Last Theorem; Proc. Sem. Current Developments in Math., Boston (1995)

[De-Ra] P. Deligne & M. Rapoport: Schémas de modules de courbes elliptiques, in: SLM 349(1973)

[Di] F. Diamond: The refined conjecture of Serre; in Proc. Ell. curves, Mod. Forms & FLT, IP,Cambridge (1995)

[Ed]* B.Edixhoven: Serre's conjecture;MS,Boston (1995)

[Fa] G. Faltings: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern; Inv. Math. 73, 349-366(1987)

[Fo-La] J.-M. Fontaine & G. Lafaille: Construction de représentations p-adiques, Ann. Sci. ENS 15, 547-608, (1982)

[Ge]* S. Gelbart: Three lectures on the modularity of $\bar{\rho}_E$, and the Langlands Reciprocity Conjecture, MS,Boston (1995)

[Ih] I. Ihara: On modular curves over finite fields; in Proc. Intern.Coll, Bombay (1973), 161-202

[Ka-Ma] N. Katz & B. Mazur: Arithmetic moduli of elliptic curves; Princeton 1985

[Ku] F. Kunz: Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkhäuser 1985

[Ma1] B. Mazur: Modular curves and the Eisenstein ideal; IHES 47, 133-186(1977)

[Ma2] B. Mazur: Rational isogenies of prime degree; Inv. Math. 44, 129-162(1978)

[Ma3]* B. Mazur: Deformation of Galois Representations;MS Boston (1995)

[Ri1] K. Ribet: Congruence relations between modular forms; Proc. ICM 17, 431-476 (1983)

[Ri2] K. Ribet: On modular representations of $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms; Inv. Math. 100, 431-476(1990)

[Ri3] K. Ribet: Multiplicities of p-finite mod p Galois representations in $J_0(Np)$; Bol. Soc. Bras. Math. 21, 177-188(1991), Boston (1995)

[Ri4] K. Ribet: Irreducible Galois representations arising from component groups of Jacobians; in: Proc. Ell. curves, Modular Forms and FLT, IP,Cambridge (1995)

[Ra1] M.Raynaud: Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$; Bull. Soc. Math. France 102, 241-286(1974)

[Ra2] M.Raynaud: Spécialisation du foncteur de Picard, IHES 38, 27-76(1970)

[Ro]* D. Rohrlich: Modular functions and modular curves, MS Boston (1995)

[Ru]* K. Rubin: Modularity of mod 5 representations; MS, Boston (1995)

[Sch]** R. Schoof: Criterion for complete intersections; MS, Boston (1995)

[Se1] J.P. Serre: Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques; Inv. math. 15, 259-331(1972)

[Se2] J.P. Serre: Abelian l-adic representations and elliptic curves; Benjamin, (1968)

[Se3] J.P. Serre: Sur les représentations modulaires de degré 2 de $G(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; Duke Math. J. 454, 179-230, (1987)

[Si] J. Silverman: The arithmetic of elliptic curves; Springer (1985)

[Sh] G. Shimura: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions; Princeton (1971)

[Ti]* J. Tilouine: Hecke algebras and the Gorenstein property; Boston (1995)

[Wa]* L. Washington: Galois cohomology; MS, Boston (1995)

[Wi] A. Wiles: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem; Ann. Math. 142, 443-551(1995)

[Ta-Wi] R. Taylor & A. Wiles: Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras: Ann. Math. 142, 553-572(1995)