Arbeitsgemeinschaft zu einem aktuellen Thema
Oberwolfach 6.4-12.4

Die Riemannsche Zetafunktion

Leitung J. Brüdern, A. Goncharov und G. Harder

Die Wahl des Themas ist etwas ungewöhnlich, weil die Riemannsche Zetafunktion seit mehr als zweihundert Jahren studiert wird, so daß man nicht davon sprechen kann, daß das Thema "Riemannsche Zetafunktion" besonders aktuell ist. Es gibt in den letzten Jahren einige neue Entwicklungen, bei denen die Werte der Zetafunktion an den ganzen Argumenten eine Rolle spielen. Wir wollen bei der AG aber versuchen, einen breit gefächerten Überblick zu geben.

Das wird zur Folge haben, daß auch viele elementare Dinge mit einer gewissen Sorgfalt diskutiert werden sollten (z.B. die Funktionalgleichung, die natürlich eigentlich gar nicht elementar ist). Auch um die Geschichte der Riemannschen Zetafunktion werden wir uns ein wenig kümmern. Daraus ergibt sich auch

daß wir diesmal einen weit größerer Kreis von Interessenten ansprechen, eine gute mathematische Allgemeinbildung ist genug, um den meisten Vorträgen zu folgen zu können, oder selber einen Vortrag zu halten.

Wir haben versucht, auch dann, wenn eigentlich schon eine hochentwickelte Sprache nötig ist, um die Ergebnisse und Vermutungen genau zu verstehen, diese an Hand von Beispielen möglichst elementar zu formulieren. So können die Teilnehmer auch dann einen Eindruck bekommen, wenn sie nicht alle Einzelheiten verstehen.

(Die sonst übliche Regel " Was irgendwann mal dran war gilt als gemeinsames Wissen der Teilnehmer" ist aufgehoben. Es sollte insbesondere im Verlaufe der Tagung einige Vorträge zu dem Thema "Kohomologie algebraischer Varietäten" geben. Dies wird bei Vortrag 2b) benötigt und dann später auch bei den gemischten Motiven. Hier gibt es die Möglichkeit, daß diese Vorträge ausser der Reihe gehalten werden. Sonst müssen die jeweiligen Vortragenden, die Dinge, die sie benötigen mit einigem Einfühlungsvermögen darstellen.)

Die Riemannsche ζ-Funktion spielt eine zentrale Rolle in der Zahlentheorie, weil Einsichten in die Natur dieser Funktion zahlentheoretische Einsuchten nach sich ziehen. Das hat schon Euler erkannt, Riemann hat entdeckt, daß man aus der Kenntnis der Nullstellen Informationen über die Verteilung von Primzahlen bekommt.

Man sollte das so verstehen: Das Studium der ζ-Funktion als "analytische" Funktion "archimedische" Informationen liefert, wir bekommen Ergebnisse über die Verteilung der Primzahlen, Abstände zwischen ihnen, Abschätzungen von Diskriminanten usw.. Es ist eine neuere Erkenntnis, daß auch in den Werten der ζ-Funktion an den (ungeraden) negativen Argumenten zahlentheoreitsche Informationen enthalten sind. Die Teilbarkeit solcher Werte durch eine Primzahl p kontrolliert die Existenz von gewissen unverzweigten Körpererweiterungen des zyklotomischen Körpers $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. Die ζ-Funktion als p-adische Funktion liefert uns in einem gewissen Sinne "nicht archimedische" Informationen.

Wenn wir neuere Entwicklungen behandeln, wird es natürlich technisch und sprachlich anspruchsvoller. Am Ende werden wir auf die Beziehungen zu den Beilinson-Vermutungen eingehen und über K-Theorie und gemischte Motive sprechen. In diesem Zusammenhang werden wir von den Vermutungen von Zagier ausgehen. Diese Vermutungen sind elementar formulierbar und können ohne großen Aufwand "verstanden werden". Ihre Interpretation ist dann allerdings schwieriger. Hier haben dann die Vortragenden das Problem zu lösen, die abstrakten Begriffe an Hand von Beispielen zu erläutern.

Vortrag 1. *Von den Anfängen zum Primzahlsatz: Eulers Arbeiten und der der Entwurf Riemanns.*

Zum Einsteig ein historisch motivierter Übersichtsvortrag, der von Euler über Dirichlet schnell zu einer gehörigen Würdigung von Riemann's Arbeit "Über die Anzahl der Primzahlen..." von 1859 kommt, von dort ist der Primzahlsatz heute nur noch ein schmückendes Detail.

In dem Vortrag sollten auch die Arbeiten von Euler über die Werte der Zetafunktion an geraden positiven Argumenten und an den ungeraden negativen Argumenten behandelt werden. Eulers Argumente sollten skizziert und bewertet werden. Es wäre besonders wünschenswert, wenn die p-adische Interpolatipon (Kummersche Kongruenzen) an dieser Stelle vorweggenommen werden könnte. (Abstimmung mit Vortrag 11)

Vortrag 2. *Funktionalgleichungen und Summationsformeln.*

a) Die Funktionalgleichung der Zetafunktion läßt sich aus der Poissonschen Summenformal herleiten - und umgekehrt. Der Beweis der Funktionalgleichung sollte mit Hilfe der Θ-Funktion geführt werden. (Siehe [Br] Es sollte darauf hingewiesen werden, daß diese Θ-Funktion eine Modulform vom Gewicht 1/2 ist. Ferner sollten die Verallgemeinerungen auf Dedekindsche Zetafunktionen und Dirichletsche L-Reihen skizziert werden.

b) Die Zetafunktion für Funktionenkörper. Hier soll kurz die algebraische Geometrie von Kurven über Körpern vorgestellt werden. Die Existenz und Eigenschaften der ℓ-adischen Kohomologiegruppen sollten postuliert werden. Es gehřt zu den Aufgaben der Vortragsperson, dies möglichst suggestiv darzustellen. Dann kommt die Herleitung der Funktionalgleichung aus dem Satz von Riemann-Roch (Riemann-Roch = Poissonsche Summenformel) und ihre Herleitung aus der Poincare-Dualität.

Die Riemannsche Vermutung im Funktionenkörperfall.

Der Vortrag dient auch zur Vorbereitung von Vortrag 4

Literatur $[Pat], [Br]$.

Vortrag 3. *Euler-Produkt und explizite Formeln.*

Patterson's Buch, Kapitel 3 Brüdern 2.6 und 2.7. Eventuell Anwendungen auf Abschätzungen von Diskriminanten und Führern von Varietäten ([Od1],[Od2])

Vortrag 4. *Der kohomologische Zugang*

Die Interpretation der Euler Faktoren an den endlichen und den unendlichen Stellen. Hier soll über die Arbeiten von Deninger berichtet werden, z.B. [De]. Dabei sollten wir uns auf die Zeta-Funktion beschränken. Dieser Vortrag könnte erweitert werden, wenn sich jemand bereit erklärt, über die Comptes-Rendus Note von A. Connes zu berichten. (Siehe [Co])

Vortrag 5: *Nullstellen von $\zeta(s)$, I.*

a) Zunächst sollte ein Überblick über den gegenwärtigen Stand bei nullstellenfreien Gebieten gegeben werden. Es gibt drei Methoden: de la Vallee-Poussin/Hadamard, Vinogradov ([T], Kapitel 3 und 6) und Montgomery's proliferation method [Mon], letztere spielt für die AG keine wichtige Rolle. Auf jeden Fall behandelt werden muss die weitgehende äquivalenz folgender Probleme:

(i) nullstellnfreie Gebiete für $\zeta(s)$,

(ii) Abschätzung von $|\zeta(1+it)|$ nach unten.

(iii) Restglied im Primzahlsatz

b) Die Vermutungen von Riemann und Lindelöf sollen in diesen Kontext eingepasst werden, auch wenn die Bedeutung der Lindelöf-Vermutung für die Nullstellen und Primzahlen erst im folgenden Vortrag deutlich wird. Einige arithmetische Konsequenzen der Riemann-Vermutung könnten erwähnt werden, aber auch Grenzen sollten aufgezeigt werden (die griffige Vermutung "zwischen zwei Quadraten ganzer Zahlen liegt eine Primzahl ist keine Folgerung aus der RV, aber fast!) Die Lindelöf-Vermutung sollte mindestens bis zur äquivalenz mit den Momentenabschätzungen

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^k \, dt \ll T^{1+\epsilon}$$

für alle $k > 0$ diskutiert werden ([T], Kapitel 13,14).

Vortrag 6: *Nullstellen II.*

Der Vortrag sollte das Wechselspiel zwischen oberen Schranken für Momente

$$\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^k \, dt \quad (1/2 < \sigma < 1)$$

und Abschätzungen für $N(\sigma, T)$ (der Anzahl aller Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Realteil $> \sigma$ und Imaginärteil in $[0, T]$.) deutlich zum Ausdruck bringen. Eine grobe Skizze für die Sätze von Ingham und Huxley ([Br], Kap.7) wäre wünschenswert, wobei die Bedeutung der Momente mit $k = 2$ und 4 unterstrichen werden sollte. Varianten für σ nahe bei $1/2$ sind ebenfalls wichtig ([T], §9.19). Mehr zu den Thema in [T], Notes for Chapter 9.

Literatur:

T: Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Neuauflage bei Oxford 1986

Mon: H.L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory

Vortrag 7:. *Cramer's probabilistisches Modell und seine Grenzen.*

Ist $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen unterhalb von x, dann liefert die Riemannsche Vermutung (siehe Vortrag 5 und 6) die Asymptotik

$$\pi(x + y(x)) - \pi(x) = y + o(y)$$

für $y \geq \sqrt{x}(\log x)^{2+\epsilon}$. Mit einer statistischen Heuristik hatte Cramer um 1930 die Vermutung geäussert, dass die fragliche Asymptotik noch mit $y = (\log x)^{2+\epsilon}$ richtig bleibt. Maier

[Ma] hat aber zeigen können, dass dies für jedes (!!!) $\epsilon > 0$ nicht der Fall ist. In diesem Vortrag sollten die wichtigsten Ideen aus [Ma] skizziert werden.

Vortrag 8: *Primzahlen in arithmetischen Progressionen I.*

In diesem Vortrag sollten in Form eines Steilkurses die Ergebnisse der Vorträge 2,3 und 4 auf Dirichletsche L-Funktionen und (auf der arithmetischen Seite) Primzahlen in arithmetischen Progressionen übertragen werden. Insbesondere sollte der Satz von Siegel-Walfisz bewiesen werden. Ferner sollte auf den Zusammenhang mit der analytischen Klassenzahlformel hingewiesen werden. (Literatur [Br, Kapitel 3 und [D])

Vortrag 9:*Primzahlen in arithmetischen Progressionen II.*

Die Sätze von Bombieri-Vinogradov und Barban-Davenport-Halberstam zeigen, dass die Restglieder im Primzahlsatz für arithmetische Progressionen meist sehr viel kleiner sind als die (schwachen) Schranken von Siegel-Walfisz. In vielen Anwendungen können diese Sätze deshalb die Riemannsche Vermutung für L-Funktionen ersetzen. Der Satz von Bombieri-Vinogradov ist der wichtigere, der Satz von Barban-Davenport-Halberstam aber leichter zu beweisen. (siehe [Br, Kapitel 5 und 6]). Elliott und Halberstam haben vermutet, dass im Satz von Bombieri-Vinogradov die Bedingung $Q \leq \sqrt{x}(\log x)^{-A}$ (in der Notation von [Br, Satz 6.2.1]) durch $Q \leq x(\log x)^{-A}$ ersetzt werden darf. Mit den Methoden aus Vortrag 7 lässt sich dies widerlegen.

Weitere Literatur: [BFI], [FG], [D]

Vortrag 10:*Kloosterman-Summen und Mittelwerte von $\zeta(s)$.*

Bei der Diskussion der Lindelöf-Vermutung in den Vorträgen 5 und 6 ist die Bedeutung von Integralmittelwerten der Zetafunktion über die Gerade $s = 1/2 + it$ bereits deutlich geworden. Es gibt eine Reihe diffiziler Techniken zum detaillierten Studium dieser Momente, beginnend mit einer historischen Arbeit von Atkinson (siehe [T], 7.16), wo erstmals Kloosterman-Summen in das Studium der Zetafunktion eingehen. Dieser Aspekt spielt gegenwärtig eine grössere Rolle, ebenso die Spektraltheorie des Laplaceoperators auf der mit hyperbolischer Metrik versehenen oberen Halbebene. Interessierte finden in den Notes for Chapter 7 aus [T] Lietraturhinweise, ferner sei auf die jüngste Arbeit aus diesem Themenkreis [Mot] hingewiesen. Die genaue Ausgestaltung dieses Vortrags hängt vom Mut und der Sachkenntnis der/des Vertragenden ab; Atkinson's Formel und die Bedeutung der Kloosterman-Summen sollte aber auf jeden Fall besprochen werden.

Literatur [Ma] H. Maier, Primes in short intervals, Michigan Math. J. 32 (1985) 221-225.

[FG] J. Friedlander, A. Granville, Limitations to the equidistribution of primes I. Annals Math. 129 (1989) 363–382.

[T] Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function. 2. Auflage mit Anmerkungen von Heath-Brown, Oxford 1986

[D] H. Davenport, Multiplicative number theory, 2nd edn, Springer 1980

Vortrag 11. *Die p-adische Zetafunktion*

In diesem Vortrag soll die Theorie der p-adischen Interpolation der Riemannschen Zetafunktion behandelt werden. Dabei sollten die Kummerschen Kongruenzen etwa so hergeleitet werden (a la Euler): Ist $k \geq 2$ dann ist

$$\zeta(1-k) = \sum n^{k-1} = 1 + 2^{k-1} + 3^{k-1} etc$$

Wenn wir eine Primzahl $p > 2$ gewählt haben, dann setzen wir

$$\zeta_p(1-k) = \sum_{p \nmid n} n^{k-1}$$

Wenn wir nun eine Kongruenz $k \equiv k' \mod (p-1)p^\alpha$ haben, dann ist

$$n^{k-1} \equiv n^{k'-1} \mod p^{\alpha+1}$$

und folglich

$$\zeta_p(1-k) \equiv \zeta_p(1-k') \mod p^{\alpha+1}$$

Ganz so einfach ist es nicht, aber fast. (Siehe [Wa] und die Diplomarbeit Maennel [Mae])

Siehe auch Vortrag 1).

Vortrag 12 *Die Werte $\zeta_p(1-k)$ und die Struktur der Idealklassengruppe von $\mathbf{Q}(\zeta_p)$*

In diesem Vortrag soll der Einfluß der Werte $\zeta(1-k)$ auf die Struktur des p-Anteils der Idealklassengruppe des zyklotomischen Körpers $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ behandelt werden. Es geht dabei um die Sätze von Herbrand -Ribet und die Hauptvermutung. Es ist vielleicht genug als Konsequenz der Hauptvermutung den p-Anteil von $\zeta(1-k)$ mit der Ordnung des entsprechenden Anteils in der Idealklassengruppe zu identifizieren. Hierzu kann man die Aufsätze von C. Rubin in den Büchern von S. Lang [La] heranziehen (Eulersysteme) man aber auch nach Mazur Wiles (Siehe auch [Ha-Pi]) die gesuchten Erweiterungen konstruieren.

Im Prinzip könnte man an dieser Stelle auch auf die Frage nach den Nennern in der q-Entwicklung der klassischen Eisensteinreihen und den der Eisensteinklassen in der Betti-Kohomologie eingehen. ([Se] Chap. VII, 4)

Die folgenden Vorträge beschäftigen sich mit den speziellen Werten der Zetafunktion an ganzen Argumenten. Das ist zwar schon in einer früheren Arbeitsgemeinschaft (April 1986) behandelt worden, aber der Zusammenhang mit den gemischten Motiven spielt dort noch keine Rolle. Die Reihenfolge der Vorträge kann u. Umständen permutiert werden.

Vortrag 13 *Das Theorem von Borel*

Wir definieren $K_{2n-1}(F) \otimes \mathbf{Q}$ als Raum der primitiven Klassen in $H_{2n-1}(Gl(F), \mathbf{Q})$. Das Theorem von Borel besagt

$$K_{2n-1}(F) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} [\mathbf{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})} \otimes \mathbf{R}(n-1)]^+$$

Die Definition der Regulatoren $c_n : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$, die Bildung der Regulatordeterminante und die Beziehung zu $\zeta_F(n)$. Beweis für $n = 2???$

(Siehe [R-Scha-Schn])

Vortrag 14: *Polylogarithmen*

Polylogarithmen als Variation von gemischten Hodge Strukturen gemischter Tate Motive über $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ Die motivische Definition der Regulatorabbildung

$$K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}/(2\pi i)^n\mathbf{Q}$$

als Realisierungsfunktor

$$K_{2n-1}^{(n)}(F) \stackrel{??}{\to} \mathrm{Ext}^1_{mixedMot}(\mathbf{Q}(0), \mathbf{Q}(n)) \to \mathrm{Ext}^1_{mixedHodge}(\mathbf{Q}(0), \mathbf{Q}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}/(2\pi i)^n\mathbf{Q}$$

(Siehe auch [B-De] und [Z])

Vortrag 15 *Gemischte Motive*

In diesem Vortrag soll versucht werden die Kohomologie von gemischten und reinen Motiven zu erklären. Es soll die Hodge-Realisierung und die ℓ adische Realisierung der Kohomologie erläutert werden.

a) Es wäre schön, wenn auch die klassischen Formeln von Euler im Kontext der Deligne Vermutungen interpretiert werden könnten. Es geht dabei darum, daß das Motiv $H^{2n}(\P^n)$ uns an jeder Stelle eine Zahl liefert: An der Stelle unendlich erhalten wir sie aus der Hodge-de-Rham-Struktur der Kohomologie. An den endlichen Stellen aus dem Euler Faktor. Die Eulersche Formel wird dann eine Produktformel.

b) Es soll dann erklärt werden, wie man aus den Konstruktionen in Zagiers Vermutung gemischte Motive gewinnt. Dazu muß man den Bloch-Suslin Komplex verstehen. Wieder Diskussion des Falles $n = 2$. ([Go1-3])

Vortrag 16

Zyklotomische gemischte Motive und die Werte $\zeta(-k)$ für gerades k

Hier gehen wir in die Richtung der Bloch-Kato Vermutung für die Riemannsche Zetafunktion. An dieser Stelle könnte man auch die Anderson Motive behandeln. Zu den obigen Argunmenten k kann man Erweiterungen

$$0 \to \mathbf{Q}(0) \to M_k \to \mathbf{Q}(-k-1) \to 0$$

konstruieren, deren Extensionsklasse in der Kategorie der gemischten Hodge-Strukturen gerade $\zeta'(-k)$ ist und deren Erweiterungsklasse in der Kategorie der ℓ-adischen Galoismoduln mit der Theorie der ℓ-adischen zetafunktion zusammenhängt. ([Ha1-2])

Man kann diese Motive auch mit Hilfe von zyklotomischen Einheiten (Beilinson) konstruieren und dann die jeweiligen Erweiterungsklassen berechnen (Vortrag 15) [Hu-Wi]).

Literatur

Geschichte:

[Eu 1] Euler: Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques Mémoires de le academie des sciences de Berlin 1761

[Eu 2] Euler: De summis serierum Reciprocarum. Comm. acad. scient. Petropolitanä 7. Beides Opera Ommia.

[Rie] B. Riemann: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Größe, Monatsber. Berliner Akad. 1858/60, 671-680

Analytische Zahlentheorie

[B-F-I] E. Bombieri, J.B. Friedlander, H. Iwaniec: Primes in arithmetic progressions to large moduli, Acta Math. 156 (1986) 203-251

[Br] Jörg Brüdern: Einführung in die analytische Zahlentheorie, Springer 1995

[De] : Evidence for a chomological approach to analytic number theory, Prodceedings of the EMS 1992 und weitere Arbeiten. Eventuell auch

[Co] Comptes Rendus Note vom November

[Fr-Gr] John Friedlander; Andrew Granville: Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions. J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 1, 25-86.

[M] Helmut Maier: Small differences between prime numbers. Michigan Math. J. 35 (1988), no. 3, 323-344

[Mo] Y. Motohashi: An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function. Acta Math., 170, 1993, no. 2, 181-220

[Od1] A. Odlyzko: Lower bounds of discriminants of number fields. Acta Arith. 29, 1976, no. 3, 275-297

[Od2] A. Odlyzko: Some analytic estimates of class numbers and discriminants. Invent. Math. 29, (1975), no. 3, 275-286

[Pat] S.J. Patterson: An introduction to the theory of the Riemann zeta function, Cambridge 1988

Spezielle Werte:

[B-De] A. Beilinson, P. Deligne Interprtation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithms et rgulateurs Proc. of Symp. in Pure Math. 55, Part II. AMS 1994, pp. 97-121

[G1] A. Goncharov: Polylogarithms in Arithmetic and Geometry Proceeding ICM, Zürich

[G2] A. Goncharov: Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives. Preprint MPI

[G3] A. Goncharov: Geometry of Configurations, Polylogarithms and Motivic cohomology. Advances in Mathematics 114, 197-318, (1985)

[Hab] K. Haberland Perioden von Modulformen einer Variablen und Gruppencohomologie, I Math. Nachrichten 112 (1983) 245-282

[Ha1] G. Harder Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive, Springer Lecture Notes 1562

[Ha2] G. Harder Andersons gemischte Motive (Preprint)

[Ha-Pi] G. Harder-R. Pink Modular konstruierte unverzweigte abelsche p-Erweiterungen von $\mathbf{Q}(\zeta(p)$ und die Struktur ihrer Galoisgruppen. Math. Nachr. 159

[Hu-Wi] A. Huber, J. Wildeshaus Classical Motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne (preprint).

[Mä] Hartmut Maennel: On the summation of complex and p-adic L-series of number fields. Diplomarbeit 1988

[La] S. Lang: Cyclotomic fields, GMT 121, 1996

[R-Scha-Schn] Rapoport-Schappacher-Schneider: Beilinsons Conjectures on Special Values of L-Functions. PM vol 4

[Se] J.-P. Serre A course in arithmetic, GTM 7

[Ri] Ribet, K. A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbf{Q}(\mu_p)$. Inv. Math. 34, 1976, 151-162

[Z] D. Zagier: Polylogarithms, Dedekind Zeta Functions and the algebraic K-Theory in "Arithmetic Algebraic Geometry" Prog. in Math. 89

[Wa] Washington, L Introduction to cyclotomic fields Graduate Texts, Springer Verlag

Anmeldungen und Vortragswünsche sollten bis 15.3.97 an

Prof. Dr. G. Harder
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstraße 6
53115 Bonn
e-mail: harder@diophant.iam.uni-bonn.de

oder (nur per e-mail, aber mit Angabe der postalischen Absenderadresse!!!) an

Prof. Dr. J. Brüdern
Mathematisches Institut A
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
e-mail: bruedern@mathematik.uni-stuttgart.de

gerichtet werden.

Senden Sie bitte Ihre Anmeldungen auch an die Geschäftsstelle des Mathematischen Forschungsinstituts in 77709 Oberwolfach-Walke, Lorenzenhof.

Ich möchte an der
"Arbeitsgemeinschaft zu einem aktuellen Thema" über

Riemannsche Zetafunktion

vom 6.4. - 12.4.1997 in Oberwolfach teilnehmen und bin bereit,

Vortrag Nr. ...., wahlweise Nr. ....

zu übernehmen.

Name: ....
Anschrift: ....
....
....
Tel: ....
e-mail: ....